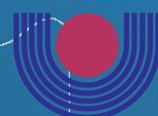


Anais da

XXXI Semana  
Acadêmica da  
Matemática  
2017



unioeste  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná



Anais da  
**XXXI Semana Acadêmica  
da Matemática**

18/09/2017 a 22/09/2017



Realização  
Curso de  
Matemática



Apoio  
**CCET**  
Centro de Ciências  
Exatas e Tecnológicas

Comissão organizadora da XXXI Semana Acadêmica da Matemática:

Fabiana Magda Garcia Papani (Coordenadora)  
Arlení Elise Sella Langer  
Clezio Aparecido Braga  
Dulcyene Maria Ribeiro  
Luciana Pagliosa Carvalho Guedes  
Rosângela Villwock  
Sandro Marcos Guzzo

Comitê científico:

Amarildo de Vicente  
André Vicente  
Andréia Buttner Ciani  
Arlení Elise Sella Langer  
Clezio Aparecido Braga  
Dulcyene Maria Ribeiro  
Fabiana Magda Garcia Papani  
Flávio Roberto Dias Silva  
Francieli Cristina Agostineto Antunes  
Luciana Pagliosa Carvalho Guedes  
Paulo Domingos Conejo  
Pedro Pablo Durand Lazo  
Rogerio Luis Rizzi  
Rosângela Villwock  
Sandro Marcos Guzzo  
Simone Aparecida Miloca  
Tânia Stella Bassoi  
Tiago Emanuel Kluber

Arte da Capa:

Clezio Aparecido Braga

Diagramação:

Sandro Marcos Guzzo

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)  
(Sistema de Bibliotecas – UNIOESTE)

S47a	Semana Acadêmica da Matemática (31.:2017: Cascavel – PR) Anais da XXXI Semana Acadêmica da Matemática / Organização: Fabiana Magda Garcia Papani...[et al.] --- Cascavel (PR): UNIOESTE 2017. <i>Online</i>  ISSN 2526-0804 Disponível em: <a href="http://midas.unioeste.br/sgev/eventos/XXXI-sam/anais">http://midas.unioeste.br/sgev/eventos/XXXI-sam/anais</a> Evento realizado no Campus de Cascavel no período de 18 a 22 de Setembro de 2017.  1. Matemática – Estudo e Ensino. 2. Ensino Superior – Congressos. I. Papani, Fabiana Magda Garcia. (Org.). II. Universidade Estadual do Oeste do Paraná. III. Título.
------	---

CDD 20.ed. 510.63

Rosângela A. A. Silva – CRB 9ª/1810

# Apresentação

A Semana Acadêmica da Matemática é o evento de extensão mais tradicional promovido pelo Curso de Matemática da UNIOESTE, campus de Cascavel. Tal evento tem periodicidade anual e em 2017 está na sua XXXI edição.

Na programação da XXXI Semana Acadêmica de Matemática figuram palestras, minicursos e comunicações orais. As comunicações orais resultam da inscrição dos participantes na modalidade de apresentadores de trabalhos que, em geral, são resultados das pesquisas de Iniciação Científica, das Monografias de conclusão de curso, de reflexões sobre os estágios obrigatórios e de trabalhos em disciplinas desenvolvidos por alunos do curso de Matemática.

Nesta edição da Semana Acadêmica de Matemática foram inscritos e apresentados 33 trabalhos. A apresentação destes no evento tem o objetivo de compartilhar com os colegas os conhecimentos adquiridos e o registro nestes anais servirá para que futuros alunos e outros interessados possam também fazer uso deste conhecimento.

A comissão organizadora agradece aos autores pelo envio dos trabalhos e também à comissão científica pelas contribuições prestadas durante o processo de avaliação e correção dos trabalhos.

A comissão organizadora.



# Índice de trabalhos

O teorema Egregium	9
O ensino dos Números Inteiros pautado na Etnomatemática	19
Um estudo sobre teoria de categorias e categorias de módulos	27
Algoritmos direcionados a jogos digitais: aplicações em inteligência artificial	39
Inversa de uma matriz particionada	49
Algoritmos direcionados a jogos digitais: elementos da game engine Unity	61
Transposição didática e o uso do livro didático	67
A Influência da concepção de Matemática do professor na sua forma de ensinar	73
O uso de jogos no ensino de operações com números racionais no ensino fundamental	81
Resolução de um problema de programação inteira por meio do algoritmo Árvores da Montanha	91
Um estudo sobre a infiltração de água em calçada de <i>pavers</i>	99
Modelos de otimização estrutural dimensional em treliças	105
Solução para a equação da onda via transformada de Fourier	113
O teorema da representação de Riesz	121
Otimização topológica em vigas pelo critério da otimalidade	133

Obstáculos didáticos e epistemológicos no ensino da multiplicação e divisão no segundo ciclo do ensino fundamental	145
Teorema do ponto fixo de Banach e aplicações	155
Otimização irrestrita através do método de região de confiança com passo de Cauchy	167
Aplicação da transformada de Laplace em equações diferenciais a coeficientes não constantes	179
Equação de Bessel	187
A Influência do Pibid na Formação Docente	199
O ensino de função do primeiro grau por meio de um experimento	205
Configuração de parâmetro no algoritmo de agrupamento de dados baseado em formigas	211
O problema das três casas	219
A igualdade para alunos do Ensino Fundamental	227
Uma revisão sobre o Ensino de Cálculo	233
Classificação de máximos e mínimos de funções de várias variáveis via autovalores	241
Tornando a matemática mais perceptível ao aluno através de um experimento	249
O ensino de matrizes por meio da resolução de problemas e ludicidade	257
Convergência da função $E_\alpha(x)$	267
Buscando fundamentar a ação docente: “0,999... é 1?”	277
O problema do empacotamento esférico	283
Aplicação do Projeto do dia da Matemática envolvendo Fractais	289

## O teorema Egregium

Alexandre Batista de Souza  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
aledaron@gmail.com

Flavio Roberto Dias Silva  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
frdsilva@yahoo.com.br

**Resumo:** Este trabalho visa percorrer o caminho da teoria de curvas e superfícies, e apresentar o teorema de Egregium, para superfícies regulares em  $\mathbb{R}^3$ . Especificamente queremos caracterizar um invariante geométrico intrínseco - a curvatura gaussiana - que não depende fundamentalmente do espaço em que está inserido, mas apenas de conceitos métricos definidos sob a superfície, e portanto mostrar que este objeto é suficiente para caracterizar uma superfície.

**Palavras-chave:** Invariante Geométrico; Isometria; Curvatura.

### 1 Introdução

Este artigo objetiva apresentar o teorema de Egregium que diz intuitivamente que a curvatura gaussiana de uma superfície é invariante por isometrias. Em outras palavras, se há uma aplicação definida em duas superfícies, que conserva a noção de distância (conserva o produto interno definido em cada ponto), então a curvatura de Gauss é igual em pontos correspondentes por esta aplicação. Este teorema nos ajuda a resolver a seguinte questão cartográfica: será que é possível obter um mapa plano da superfície terrestre que conserve a noção métrica, e portanto seja fiel as distâncias reais? Como segue do teorema Egregium o plano e a esfera não são isométricos, pois suas curvaturas são diferentes em todo ponto destas superfícies, e portanto não há uma isometria entre essas superfícies. Logo não é possível obter um mapa plano da superfície terrestre que represente fielmente a noção de distância.

Para tanto, o presente trabalho se divide em quatro capítulos com esta introdução. No capítulo 2, caracterizamos curvas em  $\mathbb{R}^3$  a partir da definição de um invariante geométrico que nos permite falar equivalência de curvas, a menos de movimentos rígidos. A este invariante denominamos de curvatura, que tem papel essencial para a definição de curvaturas de superfícies. No capítulo 3 definimos superfícies regulares e colocamos um espaço vetorial tangente a esta, em cada um dos seus pontos. Disso surge a primeira forma fundamental, que nada mais é do que uma maneira de fazer medidas sobre a superfície. Um exemplo importante de questões métricas que a primeira forma fundamental define, é a área de uma região sob a superfície. Ainda neste capítulo, buscamos definir curvaturas para uma superfície regular, as quais podem ser representadas pela segunda forma fundamental e a curvatura gaussiana, que provém da diferencial da aplicação normal de Gauss. No capítulo 4, introduzimos o conceito de geometria

intrínseca, que corresponde a geometria proveniente apenas de questões métricas feitas sob a superfície regular, sem levar em conta como a mesma está colocada no espaço. Assim neste capítulo se verifica que a curvatura gaussiana é um conceito intrínseco, mostrado no teorema Egrégium de Gauss.

## 2 Curvas Parametrizadas em $\mathbb{R}^3$

Gostaríamos de caracterizar curvas definidas em  $\mathbb{R}^3$ . Em outras palavras, o que queremos é definir invariantes geométricos, de modo que isso nos permita falar em equivalência de curvas módulo movimentos rígidos, como rotação e translação. Para curvas em  $\mathbb{R}^3$  este invariante é dado pela curvatura que intuitivamente, deve medir a taxa de variação da reta tangente, ou seja, quantidade em que a curva deixa de ser uma reta.

**Definição 1.** Uma curva parametrizada por comprimento de arco regular em  $\mathbb{R}^3$  é uma aplicação diferenciável de classe  $C^\infty$  denotada por  $\alpha$  e definida por,  $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$  em que  $x(s)$ ,  $y(s)$  e  $z(s)$  são funções reais, e  $\alpha'(s) \neq 0$ .

**Definição 2.** O vetor velocidade de uma curva parametrizada regular é definido por  $\alpha'(s) = (x'(s), y'(s), z'(s))$ .

**Definição 3.** A curvatura da curva  $\alpha(s)$  é definida por  $k(s) = |\alpha''(s)|$ .

Sendo assim, o vetor curvatura de uma curva  $\alpha \in \mathbb{R}^3$  está relacionado com a concavidade da mesma e em termos geométricos mede o quanto a curva em questão se afasta de uma reta. De fato, como pode ser observado em [?] a curvatura é um invariante geométrico e caracteriza a curva a qual está relacionada, módulo movimentos rígidos.

## 3 Superfície Regular

### 3.1 Definição e Exemplos

Intuitivamente uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$ , pode ser obtida tomando pedaços de um plano deformando-os e colando-os entre si formando assim uma estrutura lisa, na qual faça sentido existir um plano tangente em cada um dos seus pontos.

**Definição 4.** Um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície regular, se  $\forall p \in S, \exists V \subset \mathbb{R}^3$  e  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto V \cap S$ , com  $U$  e  $V \cap S$  abertos de  $\mathbb{R}^3$ , tal que:

- i)  $\mathbf{x} \in C^\infty$ ;
- ii)  $\mathbf{x}$  é um homeomorfismo;
- iii)  $\forall p \in U, d_q \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$  é injetiva.

A condição i) nos diz que  $\mathbf{x}$  é tal que suas funções coordenadas tem derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Também, ii) nos garante que  $\mathbf{x}^{-1} : V \cap S \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$  existe e é contínua. Por fim, iii) garante que a superfície regular não tenha auto-intersecções.

**Definição 5.** A aplicação  $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  é chamada de parametrização ou sistema de coordenadas locais de uma vizinhança  $V \cap S$  de um ponto  $p$ . A vizinhança  $V \cap S$  é dita vizinhança coordenada de  $S$ .

Podemos dizer intuitivamente, que uma superfície regular é um objeto que permite que se defina em uma vizinhança de qualquer um dos seus pontos uma parametrização  $\mathbf{x}$ .

**Definição 6.** Seja uma curva parametrizada  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ , com  $\alpha(0) = p$ . O vetor  $\alpha'(p)$  é o vetor tangente a  $S$  no ponto  $p$ .

**Proposição 7.** A aplicação linear  $d_q\mathbf{x}$  define vetores linearmente independentes tangente a  $S$ .

*Prova.* Considere uma parametrização  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$ , com coordenadas  $(u, v) \in U$  e  $(x, y, z) \in V \cap S$ , assim como  $\{e_1, e_2\}$  e  $\{f_1, f_2, f_3\}$  as bases canônicas de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ , respectivamente. Seja  $q = (u_0, v_0)$ . Assim o vetor  $e_1$  é tangente a curva  $u \rightarrow (u, v_0)$  que tem por imagem sob  $S$  a curva  $u \rightarrow (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0))$  e que por sua vez tem como vetor tangente  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)$ . Por outro lado pela definição de diferencial, temos que  $d_q\mathbf{x}(e_1) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$ . Analogamente, podemos deduzir que  $d_q\mathbf{x}(e_2) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$ . Como por iii)  $d\mathbf{x}$  é injetora, a matriz associada a esta aplicação linear tem vetores linearmente independentes, que são por definição de jacobiano  $\frac{\partial x}{\partial u}$  e  $\frac{\partial x}{\partial v}$ , respectivamente.  $\square$

**Exemplo 8.** A esfera unitária de  $\mathbb{R}^3$   $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  é uma superfície regular. De fato, considere a parametrização  $\mathbf{x}_1(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)})$ , com  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ . Note que  $\sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \in C^\infty$  dado a definição do domínio  $U$  da parametrização. Logo  $\mathbf{x}_1$  satisfaz a condição i). Tome  $(x, y, z) \in \mathbf{x}_1(U)$  e defina  $\mathbf{x}_1^{-1}(x, y, z) \rightarrow (x, y)$ . Isto resulta que há uma relação biunívoca entre elementos do domínio e imagem de  $\mathbf{x}_1$ , o que mostra que esta aplicação é bijetiva. Também, como  $\mathbf{x}_1^{-1}$  é a projeção canônica de  $\mathbf{x}_1(U)$  sob  $U$ , temos que esta aplicação é contínua, verificando assim a condição ii). A condição iii) é verificada observando que o determinante jacobiano não é nulo, ou seja,  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} = 1$ . De maneira análoga definimos  $\mathbf{x}_2(x, y), \mathbf{x}_3(x, z), \mathbf{x}_4(x, z), \mathbf{x}_5(y, z), \mathbf{x}_6(y, z)$ . Portanto  $S^2$  é uma superfície regular e a representação deste fato pode ser observado na figura .

### 3.2 O plano tangente

Agora veremos que a injetividade da diferencial  $d\mathbf{x}_q$  garante a existência de um espaço vetorial tangente (o plano tangente) em cada ponto  $p$  da superfície  $S$ .

**Definição 9.** O conjunto de vetores tangentes  $\alpha'(t)$  em  $p \in S$  é denominado plano tangente e denotado por  $T_pS$

O próximo resultado nos diz que o espaço vetorial associado a aplicação linear  $d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$  coincide com o conjunto dos vetores tangentes  $T_pS$ .

**Proposição 10.** *Seja  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ , com  $q \in U$  e  $\mathbf{x}_q = p$ . Sendo assim,  $d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2) = T_pS$ .*

*Prova.* Seja  $w \in T_pS$ , com  $w = \alpha'(0)$ ,  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbf{x}(U) \in C^\infty$  e  $\alpha(0) = \mathbf{x}(q) = p$ . Observe que,  $\mathbf{x}^{-1}(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z)) \in C^\infty$  e  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ . Disso decorre que  $\gamma = \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U \in C^\infty$ . Para  $t = 0$  temos que  $\gamma(0) = (u(x(0), y(0), z(0)), v(x(0), y(0), z(0)))$ , o que implica em  $\gamma'(0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}x' + \frac{\partial u}{\partial y}y' + \frac{\partial u}{\partial z}z', \frac{\partial v}{\partial x}x' + \frac{\partial v}{\partial y}y' + \frac{\partial v}{\partial z}z'\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}\right)$ . Aplicando a diferencial de  $\mathbf{x}_q$  em  $\gamma'(0)$  obtemos  $d\mathbf{x}_q(\gamma'(0)) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\right)$ . Portanto, dado que  $x, y$  e  $z$  são aplicações de  $(u, v)$ , temos pela regra da cadeia que  $d\mathbf{x}_q(\gamma'(0)) = (x'(0), y'(0), z'(0)) = w$ . Por outro lado, seja  $w = d\mathbf{x}_q(k)$ ,  $k \in \mathbb{R}^2$ , para  $\gamma(t) = tk + q$ ,  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , do que decorre que  $\gamma'(t) = k$ . Observe que  $\alpha = \mathbf{x} \circ \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , é tal que  $\alpha \in S$ . Como  $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  e  $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ , temos que  $\alpha(t) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))$  implica, pela regra da cadeia que,  $\alpha'(0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}u' + \frac{\partial x}{\partial v}v', \frac{\partial y}{\partial u}u' + \frac{\partial y}{\partial v}v', \frac{\partial z}{\partial u}u' + \frac{\partial z}{\partial v}v'\right)$ . Assim pela definição da diferencial  $d\mathbf{x}_q$  obtemos que  $d\mathbf{x}_q(k) = w = \alpha'(0)$ .  $\square$

**Definição 11.** Os vetores  $\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$  e  $\left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$  que geram o espaço vetorial associado a  $d\mathbf{x}_q$  são denominados vetores coordenados e denotados por  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$  respectivamente.

**Observação 1.** Vamos explicitar as coordenadas de  $w \in T_pS$  na base coordenada  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ . Seja  $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ , dada por  $\beta(t) = (u(t), v(t))$ , com  $\beta(0) = q = \mathbf{x}^{-1}(p)$ . Considere  $\alpha = \mathbf{x} \circ \beta$  e note que  $w = \alpha'(0) \in T_pS$ . Assim,  $\alpha'(0) = (\mathbf{x} \circ \beta)'(0) = \mathbf{x}(u(t), v(t))'(0) = \mathbf{x}_u(q)u'(0) + \mathbf{x}_v(q)v'(0) = w$ .

### 3.3 A primeira forma fundamental

Dado que definimos o que vem a ser uma superfície regular, que possui um espaço vetorial tangente em cada um dos seus pontos, queremos agora fazer geometria sob a mesma. Para tanto, assim como na álgebra linear as questões métricas são tratadas via produto interno, utilizaremos deste recurso para superfícies regulares. Mais especificamente, restringimos o produto interno usual de  $\mathbb{R}^3$  ao espaço vetorial  $T_pS$ .

**Definição 12.** A primeira forma fundamental em  $p \in S$  é denotada por  $I_p(w)$  e definida por  $I_p : T_pS \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $I_p = \langle w, w \rangle_p = |w|^2$ .

**Observação 2.** Vamos expressar a primeira forma fundamental em coordenadas para  $w \in T_pS$ . Note que  $w = \alpha'(0)$ , para  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ , com  $p = \alpha(0)$ . Assim pela definição temos que,  $I_p(\alpha'(0)) = \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p = \langle \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle_p = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle (u')^2 + \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle u'v' + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle (v')^2$ . Dado que o produto interno está associado a uma forma quadrática, a relação acima deduzida varia com os coeficientes dados por um produto interno.

**Definição 13.** As aplicações diferenciáveis  $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p, \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p$  e  $\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p$  são denominadas coeficientes da primeira forma fundamental, e são denotadas por  $E, F$  e  $G$  respectivamente.

A primeira forma fundamental aplicada ao vetor tangente a superfície regular, ou mais especificamente, os seus coeficientes, possibilitam definirmos conceitos métricas sobre a superfície, como ângulos, comprimento de curvas ou de vetores. Um exemplo importante é a definição de área de uma região simples regular por partes sob uma superfície regular.

### 3.4 A segunda forma fundamental e a curvatura gaussiana

Para curvas parametrizadas a curvatura é a taxa de variação do vetor tangente. Para superfícies iremos definir curvaturas, como a taxa de variação do plano tangente.

**Definição 14.** A aplicação normal de gauss é definida por  $N : S \rightarrow S^2$ , tal que  $N(p) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}$ , com  $\langle N, N \rangle = 1$  e  $N(p) \perp T_p S$ .

**Proposição 15.** A derivada do vetor normal é tangente a superfície  $S$ .

*Prova.* Para  $\alpha$ , com  $\alpha(0) = p$ , consideremos a restrição do campo vetorial  $N(p)$  a  $\alpha$ , definido por  $N \circ \alpha(t) = N(t)$ . Como  $\langle N, N \rangle = 1$ , por derivação usual temos que  $\langle N', N \rangle = 0$   $\square$

**Definição 16.** O operador linear definido por  $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S^2 = T_p S$  é denominado diferencial da aplicação normal de gauss.

**Proposição 17.** O operador linear  $dN(p)$  é auto-adjunto.

*Prova.* Uma vez fixada a parametrização, tomemos  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  e verifiquemos a propriedade nesta base, o que é suficiente já que  $dN(p)$  é transformação linear. Ou seja, basta verificar a igualdade dada por  $\langle dN_p(\mathbf{x}_u), \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{x}_u, dN_p(\mathbf{x}_v) \rangle$ . Observe que  $N \circ \mathbf{x}(u, v) = N(u, v)$  do que decorre que  $dN(\mathbf{x}_u) = N_u$ . Sendo assim temos que  $\langle dN_p(\mathbf{x}_u), \mathbf{x}_v \rangle = \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle$ . Mas observe que  $\langle N, \mathbf{x}_u \rangle = 0$  o que implica em  $\langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = -\langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle$ . Analogamente temos  $\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = -\langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle$ . Como segue de cálculo que  $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$ , logo obtemos que  $\langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle$   $\square$

**Observação 3.** A proposição acima garante que existe uma base ortonormal de autovetores  $f_1, f_2 \in T_p S$  e autovalores  $k_1, k_2$ , associados ao operador linear  $dN_p$ . Ou seja, podemos encontrar no plano tangente direções principais ortogonais. Também segue de álgebra linear, que  $k_1, k_2$  representam o maior e o menor, dos autovalores associados a  $dN_p$ . Vale dizer que existe uma matriz diagonal dada pelos autovalores encontrados.

**Definição 18.** Os autovalores  $k_1, k_2$  são denominados de curvaturas principais em  $p \in S$ .

**Definição 19.** A segunda forma fundamental em  $p \in S$  é denotada por  $II_p(w)$  e definida por  $II_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $II_p = -\langle dN_p(w), w \rangle_p$ .

**Definição 20.** A curvatura gaussiana é denotada por  $K$  e definida por  $K = k_1 k_2 = \det(-dN_p)$ .

**Exemplo 21.** Temos que para um plano  $\pi$ , que é uma superfície regular, que  $N(p)$  é constante e sendo assim  $dN(p)$ , o que implica em  $K(p) = 0$ .

**Exemplo 22.** Observe que segue de álgebra linear que o vetor normal a esfera unitária  $S^2$  é dado por  $N(p) = \frac{p}{r}$  e que  $r$  representa o raio dos grandes círculos  $S^1$  contidos em  $S^2$ . Sendo

assim temos  $-dN_p = I_D \frac{1}{r}$ , em que  $I_D$  representa a matriz identidade de ordem  $3 \times 3$ . Logo obtemos que  $k_1 = k_2 = \frac{1}{r}$  e portanto a curvatura gaussiana da esfera unitária  $S_2$  é  $K(p) = \frac{1}{r^2}$ .

**Observação 4.** Tome  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ , com  $\alpha(0) = p$ . Assim temos que  $\alpha' = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'$ , implicando em  $dN(\alpha') = N_u u' + N_v v'$ . Sendo assim, a segunda forma fundamental, aplicada ao vetor tangente  $\alpha'$  resulta em  $II_p(\alpha') = -\langle dN_p(\alpha'), \alpha' \rangle = \langle N_u u' + N_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle = -(\langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle (u')^2 + 2\langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle u'v' + \langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle (v')^2)$ . Como temos que  $\langle N, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_v \rangle = 0$  concluímos que  $-\langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle$ ,  $-\langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle$  e  $\langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle$ .

**Definição 23.** As aplicações diferenciáveis  $\langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle_p, \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle_p$  e  $\langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle_p$  são denominadas coeficientes da segunda forma fundamental, e são denotadas por  $e, f$  e  $g$  respectivamente.

**Observação 5.** Como  $N_u, N_v \in T_p S$ , podemos escrever  $N_u = a_{11} \mathbf{x}_u + a_{21} \mathbf{x}_v$  e  $N_v = a_{12} \mathbf{x}_u + a_{22} \mathbf{x}_v$ . Portanto temos que  $dN_p(\alpha') = (a_{11} u' + a_{12} v') \mathbf{x}_u + (a_{21} u' + a_{22} v') \mathbf{x}_v$ . Isso nos diz que na base coordenada o operador linear  $dN$  é dado pela matriz  $(a_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2$ . Assim, dado que  $dN$  é auto-adjunto, podemos encontrar uma expressão pra curvatura gaussiana, determinando a matriz de  $(a_{is})$ .

**Proposição 24.** A curvatura gaussiana é dada por  $K(p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$ .

*Prova.* Convencione que  $u$  e  $v$  correspondam a 1 e 2 respectivamente. Assim as derivadas parciais de  $N$  podem ser escritas como  $N_i = \sum_{j=1}^2 a_{ji} x_j$ . Considere a matriz  $g$ , dada por  $g_{ij} = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle$ , assim como a matriz  $\pi$ , dada por  $\pi_{ij} = -\langle N_i, \mathbf{x}_j \rangle$ . Sendo assim, observe agora que  $\langle N_i, \mathbf{x}_k \rangle = \sum_j a_{ji} \langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k \rangle$ , do que decorre  $\pi_{ik} = -\sum_j a_{ji} g_{jk} = -\sum a^T_{ij} g_{jk}$ . Por definição de produto de matrizes deduzimos que  $\pi_{ik} = -(a^T g)_{ik}$  o que implica que  $\pi = -a^T g$  e  $a^T = -\pi g^{-1}$ . Disso, como  $K = \det a$ , temos que  $K = \det(-\pi) \det(g^{-1})$  e portanto  $K = \frac{\det \pi}{\det g} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$ .  $\square$

## 4 A Geometria Intrínseca

Fazer geometria intrínseca, é estudar invariantes geométricos que não dependem de como a superfície em questão está colocada no ambiente, mas apenas de questões métricas definidas sob a mesma.

### 4.1 Isometrias

**Definição 25.** Uma aplicação  $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$  é uma isometria se  $\varphi$  é um difeomorfismo e se  $\forall p \in S, \forall w_1, w_2 \in T_p S$  temos  $\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}$ .

**Observação 6.** Se  $\varphi$  é isometria segue que  $I_p(w) = \langle d\varphi_p(w), d\varphi_p(w) \rangle_{\varphi(p)} = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w))$ , e assim a primeira forma fundamental é igual em pontos correspondentes. Por outro lado, se  $\varphi$  preserva a primeira forma fundamental, ou seja,  $I_p(w) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w))$ ,  $\forall w \in T_p S$ , então  $2\langle w_1, w_2 \rangle = I_p(w_1 + w_2) - I_p(w_1) - I_p(w_2)$ . A esta fórmula, dando coordenada para  $w_1, w_2$ , obtemos que  $I_p(w_1 + w_2) - I_p(w_1) - I_p(w_2) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1 + w_2)) - I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1)) - I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_2)) =$

$2\langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}$ . Logo,  $\varphi$  é isometria. Isto nos faz perguntar se os coeficientes da primeira forma fundamental são iguais então há isometria mesmo que num aberto da superfície.

**Definição 26.** Se  $\varphi : V \subset S \rightarrow \bar{V}_{\varphi(p)} \subset \bar{S}$  é isometria entre  $V$  e  $\bar{V}$  então  $\varphi$  é dita isometria local. Se for isometria local  $\forall p \in S$  então  $S$  e  $\bar{S}$  são ditas localmente isométricas.

**Proposição 27.** Sejam  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  e  $\bar{\mathbf{x}} : U \rightarrow \bar{S}$  tais que  $E = \bar{E}$ ,  $F = \bar{F}$ ,  $G = \bar{G}$  em  $U$ , então  $\bar{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1}$  é isometria local.

*Prova.* Seja  $p \in \mathbf{x}(U)$  e  $w \in T_p S$ . Então  $w$  é tangente  $\mathbf{x}(\alpha(t))$ , com  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$  em  $U$ . Assim  $w = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'$ . Denote a função desejada por  $\varphi$ . Por definição  $d\varphi$  toma  $w \in T_p S$  e leva em  $d\varphi(w) \in T_{\varphi(p)} \bar{S}$  tangente a curva  $\varphi(\alpha(t)) = \bar{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{x}(\alpha(t)) = \bar{\mathbf{x}}(\alpha(t))$ . Portanto,  $d\varphi(w) = \bar{\mathbf{x}}_u u' + \bar{\mathbf{x}}_v v'$  e as coordenadas de  $w$  e  $d\varphi(w)$  são iguais. Disso e da hipótese, concluímos que  $I_p(w) = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2 = \bar{E}(u')^2 + 2\bar{F}u'v' + \bar{G}(v')^2 = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w))$ ,  $\forall p \in \mathbf{x}(U)$ . Assim  $\varphi$  é isometria local.  $\square$

## 4.2 O teorema Egregium.

O estudo da geometria intrínseca se deu dado um problema extrínseco: Gauss queria formular uma espécie de teorema fundamental das superfícies. Mais especificamente, ele queria responder a seguinte questão: Dado  $g_{ij}, \pi_{ij} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , existe  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2$  que realiza  $g_{ij}$  e  $\pi_{ij}$  como primeira e segunda forma fundamental, respectivamente?

**Observação 7.** Analogamente as curvas, vamos observar a base dada por  $\{N, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ . Escrevendo as derivadas dos seus representantes em si mesma, temos que

$$\mathbf{x}_{uu} = \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + L_1 N$$

$$\mathbf{x}_{uv} = \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v + L_2 N$$

$$\mathbf{x}_{vu} = \Gamma_{21}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{21}^2 \mathbf{x}_v + \bar{L}_2 N$$

$$\mathbf{x}_{vv} = \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + L_3 N$$

$$N_u = a_{11} \mathbf{x}_u + a_{21} \mathbf{x}_v$$

$$N_v = a_{12} \mathbf{x}_u + a_{22} \mathbf{x}_v$$

Sabemos que os  $a_{is}$  são determinados pela relação  $a^T = -\pi g^{-1}$ . Ou seja,  $a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}$ ,  $a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2}$ ,  $a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}$  e  $a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}$ . Se tomarmos o produto interno nas quatro primeiras relações com  $N$  temos que  $L_1 = e$ ,  $L_2 = \bar{L}_2 = f$  e  $L_3 = g$ . Queremos determinar os valores de  $\Gamma_{ij}^k$  com  $i, j, k = 1, 2$ . Como  $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$  temos que  $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$  e  $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$ . Tomemos agora o produto interno nas primeiras quatro relações por  $\mathbf{x}_u$  e  $\mathbf{x}_v$ . Assim temos,

$$\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle = \frac{1}{2} E_u$$

$$\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F &= \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle = \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G &= \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle = \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F &= \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G &= \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle = \frac{1}{2} G_v\end{aligned}$$

Portanto os  $\Gamma_{ij}^k$  são determinados apenas em termos da primeira forma fundamental e suas derivadas, pois  $EG - F^2 \neq 0$ . Ainda das primeiras relações e das deduções para os  $L_{is}$  podemos obter,

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}_{uu})_v &= \\ (\Gamma_{11}^1)_v \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v + fN) + (\Gamma_{11}^2)_v \mathbf{x}_v + \Gamma_{11}^2 (\Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + gN) + e_v N + e(a_{12} \mathbf{x}_u + a_{22} \mathbf{x}_v) \\ (\mathbf{x}_{uv})_u &= \\ (\Gamma_{12}^1)_u \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^1 (\Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + eN) + (\Gamma_{12}^2)_u \mathbf{x}_v + \Gamma_{12}^2 (\Gamma_{21}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{21}^2 \mathbf{x}_v + fN) + f_u N + f(a_{11} \mathbf{x}_u + a_{21} \mathbf{x}_v)\end{aligned}$$

Colocando  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$  e  $N$  em evidência temos que,

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}_{uu})_v &= \mathbf{x}_u [(\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + ea_{12}] + \mathbf{x}_v [(\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + ea_{22}] + N(e_v \Gamma_{11}^1 f + \Gamma_{11}^2 g) \\ (\mathbf{x}_{uv})_u &= \\ \mathbf{x}_u [(\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 + fa_{11}] + \mathbf{x}_v [(\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + fa_{21}] + N(f_v \Gamma_{12}^1 e + \Gamma_{12}^2 f)\end{aligned}$$

Como temos que  $(\mathbf{x}_{uu})_v = (\mathbf{x}_{uv})_u$ , obtemos das relações acima que,

$$\begin{aligned}(\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + ea_{22} &= (\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 + fa_{11} \implies (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 - \\ (\Gamma_{12}^1)_u - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 &= fa_{11} - ea_{22} = \frac{f^2 F + feG - egF + efG}{EG - F^2} = -\frac{F(eg - f^2)}{EG - F^2} = -FK.\end{aligned}$$

Temos portanto, que a curvatura gaussiana só depende dos coeficientes da primeira forma fundamental

**Teorema 28.** (O teorema Egregium) A curvatura gaussiana é invariante por isometrias locais.

*Prova.* Seja  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  e  $\varphi : V_p \subset S \rightarrow \bar{S}$ , com  $V_p \subset \mathbf{x}(U)$ , uma isometria local em  $p$ . Seja  $\mathbf{y} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \bar{S}$  em  $\varphi(p)$ . Assim  $\mathbf{y} \circ \mathbf{x}^{-1} = \varphi \implies \mathbf{y} = \varphi \circ \mathbf{x}$ . Temos que  $\varphi$  conserva os coeficientes da primeira forma fundamental de  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  em pontos correspondentes  $q$  e  $\varphi(q)$ ,  $q \in U$ . Assim como temos da observação anterior que a curvatura gaussiana é determinada apenas pelos coeficientes da primeira forma fundamental, e estes não mudam em pontos correspondentes de uma isometria, concluímos que  $K(q) = K(\varphi(q))$ .  $\square$

## 5 Considerações

Este trabalho objetivou percorrer o caminho da geometria diferencial, para apresentar o teorema de Egregium. Este resultado é de grande importância para a geometria diferencial, uma

vez que, entre outras coisas, mostra que a curvatura gaussiana é um objeto intrínseco, ou seja, só depende de conceitos métricos definidos sobre a superfície, sem levar em conta, de maneira fundamental, como a superfície está contida no espaço. Além disso, esta curvatura não muda em pontos correspondentes dado por uma isometria.

## Referências

- TENENBLAT, Keti. Introdução à geometria diferencial. 2 ed. São Paulo: Blucher, 2008. 267 p.
- LEITHOLD, Louis. Cálculo com geometria analítica. 3 ed. São Paulo: Harbras, 1994. 1177 p.
- CARMO, Mandredo Perdigão Do. Geometria diferencial de curvas e superfícies. 3 ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005. 607 p.
- BREZIS, Haim. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. London: Springer, 2011. 595 p.
- RUDIN, Walter. Principles of mathematical analysis: 3. Wisconsin: Library of Congress Cataloging, 1976. 342 p.



## O ensino dos Números Inteiros pautado na Etnomatemática

Ana Maria Foss<sup>1</sup>

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste  
anafoss@bol.com.br

Daiane Cristina da Silva Aliatti<sup>1</sup>

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste  
Daya\_alliatti@hotmail.com

Diessica Aline Quinot<sup>1</sup>

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste  
diessicaquinot@gmail.com

**Resumo:** O presente texto tem como objetivo relatar as experiências no desenvolvimento de uma sequência didática do conteúdo de Números Inteiros, realizada por graduandos do curso de Matemática, bolsistas do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid), no subprojeto do curso de Matemática da Unioeste, campus de Cascavel - PR. As atividades ocorreram no ano de 2017, nas turmas de sétimos anos do Ensino Fundamental do Colégio Estadual Ieda Baggio Mayer. Como metodologia elaboramos uma sequência didática tomando como referência a Etnomatemática, ou seja, nos baseamos no ambiente cultural e socioeconômico em que nosso público alvo vive. Para isso utilizamos nas atividades termômetros e distâncias buscando trazer significado para a Matemática ensinada na escola, objetivando desenvolver nos alunos a criatividade e a capacidade crítica. Como resultados do desenvolvimento da sequência didática apontamos a maior participação dos alunos durante as aulas de matemática, a motivação para realizar as atividades propostas, melhores notas na avaliação posteriormente proposta pela professora regente das turmas e a apropriação da cultura escolar.

**Palavras-chave:** Números inteiros; Etnomatemática; sequência didática.

### 1 Introdução

Considerando a importância dos números no desenvolvimento das sociedades, do homem e da matemática, é de grande valia voltar-se ao seu contexto sócio histórico de criação e desenvolvimento. Em seguida faremos um breve relato histórico sobre as formas de contagem embasados em Boyer (1991) e Roque (2012).

Segundo Boyer (1991) Há pelo menos 20.000 anos, a ideia de número teve seu princípio a partir da necessidade de contagem dos antigos povos das cavernas, os quais utilizavam-se de ossos e bastões de madeira em que marcavam a quantidade de alimento coletada com certa quantidade de riscos, sendo que cada risco representava uma unidade de alimento. Após a

---

<sup>1</sup>Aluna do Curso de Licenciatura em Matemática e bolsista do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência-PIBID, financiado pela Capes.

transição da vida nômade para o início das comunidades agrícolas passou-se a se utilizar deste método para demarcar também a quantidade de animais que saíam para pastar e aqueles que retornavam, para que assim fosse possível determinar se algum animal tenha se perdido ou fora caçado por um predador.

Com o novo modo de vida, os povos passaram a construir seus próprios recintos habitacionais e formaram as primeiras sociedades. Segundo Mateus, Silva e Rebola por volta de 4.000 a.C., os sumérios passaram a utilizar um objeto cônico de forma equivalente aos riscos nos ossos, o que lhes permitiu se apropriar inconscientemente da subtração, além da soma já conhecida. A preocupação e utilização da matemática se dava por conta da necessidade de calcular ganhos e perdas, administrar e organizar a distribuição de alimentos, cobranças de impostos, entre outras funções. Além disso, de acordo com Boyer (1991) é importante ressaltar que apesar da inexistência da escrita os sumérios passaram a registrar suas contas, o que também inconscientemente deu origem a noção de escrita.

Apesar do sistema utilizado pelos sumérios ser muito útil, não apresentava grande eficiência. Segundo Boyer (1991) por volta de 3.000 a.C., com a necessidade de contar e calcular grandes quantidades passou-se a representar os números com símbolos. Além de estender sua utilidade ao contexto de medição, onde fora possível se apropriar da precisão utilizando-se de uma medida fixa, obtida pelo comprimento do braço de um homem do ombro a ponta dos dedos somado à largura da palma de sua mão, conhecido como cúbito.

Entretanto, após os romanos se apropriarem destes conhecimentos, de acordo com Boyer (1991) por volta de 212 a.C., houve uma estagnação nas teorias matemáticas, pois os romanos estavam interessados em poder, ao contrário de matemáticos clássicos como Arquimedes e Pitágoras, que buscavam abstrações. Assim os números passaram a ser utilizados pelos romanos para aplicações práticas, que ajudavam na rígida organização da sociedade. Além disso, os romanos representavam os números com as letras de seu alfabeto, sendo assim este era apenas um simples sistema de contagem o que não possibilitava avanços na matemática teórica. Desta forma, qualquer cálculo romano era feito em uma tábua de contar, uma forma primitiva do ábaco. Esta forma de numeração se espalhou tão vastamente quanto a dominação territorial dos romanos.

Contudo, por volta de 500 d.C., começou a perder relevância com as descobertas e criações dos hindus na Índia, que desenvolveram números estupendamente grandes. Assim para lidar com estes imensos números, os indianos criaram um sistema composto por números inteiros de 1 a 9. Além disso, a maior invenção dos hindus fora a representação e criação do número 0 que significava o nada ou vazio. Assim, com os algarismos de 0 a 9 os indianos eram capazes de formar números infinitamente grandes ou pequenos, o que até então não era possível. É de grande valia ressaltar que a noção de zero já era conhecida pelos Babilônios desde 2500 a.C., porém não detinham ainda um símbolo para o próprio.

Este sistema permitiu grandes avanços científicos na Índia, como o cálculo do diâmetro do globo terrestre com um erro menor do que 1% da medida correta. Por conta de sua maior eficiência e aplicabilidade, estes passaram gradativamente a se espalhar pelo mundo, inicialmente

pelos territórios arábicos, cujo povo fora responsável por disseminar tal conhecimento ao resto do mundo, por conta disto, este sistema é chamado de sistema numérico hindu-arábico.

Em suma, o sistema decimal fora criado para suprir as necessidades de contagem e organização, inicialmente por correlações a conjuntos familiares como dedos das mãos ou pés, na sequência com representações em gravetos ou ossos e, posteriormente, com objetos e símbolos, além da compreensão da adição e subtração que originaram os conjuntos dos números naturais  $\mathbb{N}$  e dos inteiros  $\mathbb{Z}$ . Estes aspectos possibilitaram a criação da matemática e desenvolvimento de muitas outras áreas de estudo, transformando toda a sociedade.

Assumindo a importância dos números inteiros para nossa sociedade, reconhecemos a importância do ensino deste conjunto de números aos alunos, futuros cidadãos atuantes de nossa sociedade que necessitam desses conhecimentos para transformá-la. Neste trabalho será apresentada uma experiência sobre o desenvolvimento de uma sequência didática do conteúdo de Números Inteiros, realizada por graduandos do curso de Matemática, bolsistas do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid), no subprojeto do curso de Matemática da Unioeste, campus de Cascavel - PR. As atividades ocorreram no ano de 2017, nas turmas de sétimos anos do Ensino Fundamental do Colégio Estadual Ieda Baggio Mayer.

## 2 A sequência didática

O objetivo estabelecido na sequência didática foi que os alunos compreendessem o conceito de números inteiros e que identificassem o uso dos números negativos em situações do cotidiano. Algumas destas abordagens têm o objetivo de tornar este conteúdo significativo e de fácil compreensão para o aluno, pois historicamente não foi simples a aceitação dos números negativos, e é nítido que os estudantes têm dificuldades para entendê-los. A partir de exemplos e objetos do dia a dia é possível facilitar a aprendizagem dos números inteiros, como o foi o uso termômetro que foi o principal instrumento utilizado para comparações com números negativos.

Para elaborar a sequência didática nos embasamos na Etnomatemática que

[...] procura delinear alguns possíveis caminhos que valorizem os desejos a cultura o meio social do educando, a fim de que possa usar de forma mais adequada os conhecimentos matemáticos. Incorporar a cultura, a vida do educando nas práticas pedagógicas valoriza a vivência, coloca em cena a cultura local de cada grupo, e uma possibilidade de questionar o que é considerado válido como conhecimento e para que este conhecimento é válido (SCHMITZ apud XAVIER e PEDROSO, 2007, p. 5).

Uma grande dificuldade do professor é identificar o contexto em que vivem seus alunos buscando identificar seus conhecimentos prévios oriundos de suas práticas sociais e culturais e muitas vezes comete erros ao basear-se em seu próprio ambiente cultural apenas. Por isso, devido as baixas temperaturas registradas na cidade de Cascavel durante o inverno, cidade onde reside nosso público alvo, optamos pela utilização de situações problema que envolvessem temperaturas para trabalhar de forma significativa os números negativos. Ao se trabalhar com módulo de um número trabalhamos com distâncias, algo muito comum a todos os estudantes sem exceção.

Além disso, oportunizamos aos alunos em todas as discussões sobre as situações problema, que expusessem suas soluções e explicações que muitas vezes resultavam de suas vivências e do ambiente cultural em que vivem. Como por exemplo, como determinamos a temperatura de um termômetro, suas marcações, como é medida a distância de um lugar a outro (km, metros, quadra, quarteirão).

Ademais fomos cuidadosos em não transformar o conhecimento científico em um mero saber do senso comum, oportunizando aos alunos, depois do trabalho com situações contextualizadas, a generalização dos conceitos envolvidos, pois segundo D' Ambrósio “[...] contextualizar não quer dizer fazer um texto menos rigoroso, impreciso e ‘aliviado’ de matemática correta.” (2008, p. 16).

Planejamos também uma atividade de pesquisa na internet para que os alunos procurassem exemplos da utilização dos números negativos em nossa sociedade já que apesar de

[...] parecer contraditório falarmos em uma matemática sofisticada quando fazemos a proposta da Etnomatemática, mas justamente o essencial da Etnomatemática é incorporar a matemática cultural, contextualizada, na educação matemática e o uso de mídias amplia essa possibilidade, pois os recursos tecnológicos têm favorecido as experimentações matemáticas, visto que o raciocínio lógico com qualidade é essencial para situar-se no mundo moderno e chegar a uma nova organização de sociedade, que permita exercer a crítica e análise do mundo moderno que vivemos (XAVIER e PEDROSO, 2007, p.7).

Porém, nos deparamos com o despreparo desses alunos para utilizarem as tecnologias a seu favor, obtivemos como resposta à pesquisa feita, os exemplos os quais já havíamos apresentados aos alunos nas atividades anteriores como temperaturas e saldo bancário. Considerávamos apareceriam mais exemplos como altitudes em relação ao nível do mar, dívidas, perda de peso, manchetes indicando queda na bolsa de valores, tabelas ou gráficos que contivessem números negativos, entre outros.

### 3 O desenvolvimento da sequência didática

Na sequência didática, propusemos a seguinte situação: Um termômetro foi colocado na cidade de Campos do Jordão, no estado de São Paulo, o qual marcou dez graus acima de zero durante o dia e um grau abaixo de zero durante a noite. Como podemos representar as temperaturas registradas nesta cidade, utilizando símbolos e algarismos matemáticos? Poucos alunos alegaram nunca ter ouvido falar nos noticiários a respeito disso e por isso não souberam responder, mas a maioria conseguiu, sendo que alguns deles utilizaram o símbolo  $^{\circ}\text{C}$ , mas o exercício não especificava em qual escala estavam as temperaturas. Isso confirma a familiaridade dos alunos com temperaturas já que conhecem pelo menos uma das escalas termométricas.

Na segunda atividade propusemos uma pesquisa que eles deveriam fazer sobre a utilização dos números negativos em nosso cotidiano. Na correção destas percebemos que a maioria dos alunos não teve atenção ao fazer a pesquisa, pois não responderam as questões propostas. Eles deveriam pesquisar e registrar situações do cotidiano em que os números negativos estavam presentes exceto sobre temperatura, pois essa foi nossa abordagem sobre os números inteiros,

porém muitos só colocaram sobre temperatura. Também percebemos que eles têm dificuldade em diferenciar o conjunto dos naturais do conjunto dos números inteiros, já que em uma questão, ao responderem se os números naturais eram suficientes para expressar todas as situações do nosso cotidiano, afirmavam que sim e ao justificar usavam exemplos sobre números negativos.

A terceira atividade continha três termômetros em que os alunos determinariam as temperaturas que eles marcavam. Os alunos encontraram dificuldades devido à forma como as temperaturas estavam marcadas no termômetro, entre  $-30$  e  $-40$ , alguns diziam que o termômetro marcava  $45^\circ$ , pois a marca estava acima de  $-40^\circ$ . Na correção nós explicamos para eles de forma bastante detalhada o porquê da temperatura ser  $-35^\circ$  e não  $-45^\circ$ .

Em seguida, propusemos que resolvessem algumas atividades do livro didático. A questão que gerou mais dúvida dizia: Se uma pessoa tinha R\$71,00 no banco e retirou R\$100,00, ela ficou com o saldo positivo ou negativo? Quanto é o valor desse saldo? A dúvida dos alunos era na segunda pergunta, pois ainda não sabiam operar com números inteiros. Porém os alunos encontraram um resultado positivo que fora R\$29,00 e que os deixou um tanto quanto intrigados, pois perceberam o absurdo no qual chegaram. Com isso explicamos a eles que se tratava de uma dívida, quando se gasta 100 reais e só possui 71 reais para pagar o seu saldo não é positivo, mas negativo, então os alunos compreenderam que o resultado era sim R\$29,00, porém negativo. Acreditamos que a fácil aceitação desse fato deve-se a familiaridade dos alunos com dinheiro.

Por conseguinte, mais alguns exercícios foram propostos, do tipo de completar as lacunas com maior ou menor, relacionando duas temperaturas, nestes não houve dúvidas. Como na hora de resolver os exercícios já estavam comparando corretamente as temperaturas, percebemos que já era hora de explicar as noções básicas que permeiam os números inteiros, foram elas: a) Entre dois números inteiros positivos, o maior é o que tem maior módulo. b) Qualquer número inteiro positivo é maior que zero. c) Qualquer número inteiro positivo é maior que qualquer inteiro negativo. d) Qualquer número inteiro negativo é menor que zero. e) Dentre os números inteiros negativos, o maior é o que possui menor módulo. Ao final desta atividade construímos a reta numérica na lousa e concluímos com os alunos que o maior número é sempre aquele que está mais à direita do zero.

Em seguida, dando continuidade à sequência didática, distribuímos a cada aluno um número inteiro, desenhamos no quadro a representação de uma reta e fixamos o zero. Posteriormente chamamos aleatoriamente os números, o aluno que estava com o número chamado na mão deveria levantar-se e posicionar o número no local correto, respeitando o espaço entre um número e outro, que deve ser do mesmo tamanho. Após o aluno posicionar o número, questionávamos aos outros alunos se estava correto, algumas vezes eles diziam estar errado, então chamávamos quem alegou estar errado para reposicionar o número, caso realmente estivesse errado. Quando terminamos a construção da reta numérica no quadro pedimos que eles a representassem no caderno e eles não tiveram dúvidas, pois entenderam sobre a distância entre os números e também sua ordem na reta numérica.

Na atividade seguinte propusemos a seguinte situação problema: Seu Clodoaldo sai de sua casa e vai diariamente ao Clube do Bairro. É no clube que ele se encontra com seu João

para, juntos, praticarem algumas atividades físicas. A figura 1 representa a avenida onde seu Clodoaldo e seu João moram. O ponto O corresponde ao Clube do Bairro e cada intervalo corresponde a um quarteirão. A letra J indica a casa de seu João e a letra C indica a casa do seu Clodoaldo.



Figura 1: Avenida

Responda:

- Qual é a distância da casa de seu João ao Clube do Bairro?
- Qual é a distância da casa do seu Cláudio ao Clube do Bairro?
- Se considerarmos o ponto O sendo o número 0 da reta numérica que número representaria a casa de seu João?
- Se considerarmos o ponto O sendo o número 0 da reta numérica que número representaria a casa de seu Cláudio?

Esse problema trouxe à tona discussões sobre as diferenças entre uma quadra e um quarteirão, ambas as palavras eram conhecidas para os alunos, porém alguns não conseguiam distingui-las. Assim discutimos o que eles entendiam dessas duas palavras e suas significações em nossa cultura, concluindo que quadra é a distância entre uma esquina e outra, ambas situadas no mesmo lado de uma rua e quarteirão é um conjunto de casas formando um quadrado e limitado por quatro ruas. A discussão foi muito produtiva, pois oportunizamos aos alunos que eles se apropriassem mais da cultura do lugar onde vivem, conhecendo melhor o significado de quadra e quarteirão. Com esse problema definimos módulo como uma distância. A distância de certo número à origem da reta numérica (o número zero).

Em seguida explicamos o que são números opostos ou simétricos. Para isto utilizamos uma folha sulfite A4 e representamos nela a reta numérica, depois dobramos ao meio (onde estava o ponto zero) e solicitamos que os alunos observassem os números que se sobrepunham e tentassem explicar o porquê disso. A maioria dos alunos conseguiu perceber que eles se sobrepunham, pois estavam a mesma distância do zero. Assim definimos que dois números são opostos ou simétricos se eles estão a mesma distância do zero ou equivalentemente quando tem o mesmo módulo.

## 4 Considerações finais

Quem presencia diariamente a realidade das escolas, no que tange ao ensino de Matemática, ouve como os alunos dizem odiar a Matemática. Essa afirmação traz muito da forma como ela é ensinada: repetição de algoritmos e memorização. Nesse sentido D' Ambrósio afirma que

[...] a Matemática pode ser perversa, fazendo com que indivíduos tornem-se intelectualmente passivos e temerosos, levando-os a perderem sua capacidade de crítica, algumas vezes os tornando mesmo alienados. Por exemplo, o modelo tradicional da escola, que consiste em ensinar uma quantidade de práticas e regras que depois são cobradas em exames e testes, tem esse resultado perverso. (2008, p. 13).

Por isso optamos por um ensino mais significativo pautando-nos na Etnomatemática que segundo D' Ambrósio “[...] é uma forma de se preparar jovens e adultos para um sentido de cidadania crítica, para viver em sociedade e ao mesmo tempo desenvolver sua criatividade.” (2008, p. 8). Além disso, “Esta forma de trabalhar não é mecânica ou fria, e tem constante relação com a realidade e com a participação dos educandos.” (XAVIER e PEDROSO, 2007, p. 8).

Como resultado do desenvolvimento da sequência didática apontamos a maior participação dos alunos durante as aulas de matemática, a motivação para realizar as atividades propostas, melhores notas na avaliação posteriormente proposta pela professora regente das turmas e a apropriação do significado de algumas palavras utilizadas pela cultura do lugar onde vivem.

Também percebemos a dificuldade dos alunos em realizar uma tarefa sobre a identificação do uso de números inteiros no cotidiano, o que pode revelar desinteresse pela tarefa embora dominassem o ambiente virtual. Não consideramos que foi um erro a escolha dessa atividade, mas sim um avanço na inclusão digital para alguns alunos. Temos que oportunizar a todos o acesso às tecnologias já que os menos favorecidos geralmente são privados delas. A condução da atividade poderia ter sido diferente. Poderíamos ter ofertado aos alunos a sala de informática da escola e oportunizado uma familiarização com o ambiente virtual para realizassem a tarefa escolar.

Apesar disso, acreditamos que os resultados foram bons. Por isso, continuaremos a nos empenharmos na busca da melhoria dessa sequência didática, pois acreditamos alcançar melhores resultados.

Ressaltamos a importância do planejamento da aula que possibilita ao professor prever suas ações pedagógicas, no entanto não garante o sucesso da aula, já que esse depende, além do preparo do professor, do empenho e esforço dos alunos que nem sempre conseguimos. Porém, como o planejamento é um registro, após o desenvolvimento da aula podemos explicar o sucesso ou o insucesso dos objetivos pretendidos.

## Referências

- ROQUE, Tatiana. **História da Matemática**: uma visão crítica desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro. ZAHAR, 2012.
- BOYER, Carl B. **História da Matemática**. São Paulo. Edgard Blücher, 1991.
- SCHMITZ, Carmen Cecília. **Caracterizando a Matemática escolar**. Disponível em: <[www.inep.gov.br](http://www.inep.gov.br)>. Acesso em: 30 ago. 2017.
- D'AMBROSIO, Ubiratan. O Programa Etnomatemática: uma síntese. Canoas: **Acta Scientiae**, v. 10, n.1, p.7-16, jan./jun. 2008.
- MATEUS, Andreia Margarida Guerreiro. SILVA, Ana Patrícia Lima da. REBOLA, Célia Conceição Carinhas. **6 formas de pensar os Algarismos**. Disponível em: <<http://webpages.fc.ul.pt/~ommartins/seminario/algarismos/quemsomos.htm>>. Acesso em: 13 set. 2017.
- XAVIER, Eliane Túlio. PEDROSO, Sandra Maria Dias. **A Etnomatemática na dimensão educacional**: encontrar a matemática subentendida na prática profissional. In: Paraná. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência da Educação. Programa de Desenvolvimento Educacional. O professor PDE e os desafios da escola pública paranaense, 2007. Curitiba: SEED - Pr., 2016. V.2

## Um estudo sobre teoria de categorias e categorias de módulos

Alexandre Carissimi<sup>1</sup>

Acadêmico do Curso de Matemática - Unioeste - Campus de Cascavel  
alexandre.carissimi.96@gmail.com

Clezio Aparecido Braga

Unioeste - Campus de Cascavel  
clezzio@gmail.com

**Resumo:** Neste trabalho estudaremos alguns resultados sobre a teoria de módulos, as definições de aljavas e álgebras de caminhos e categorias, apresentaremos a definição da categoria das representações de módulos sobre uma álgebra de caminhos e, concluiremos, exibindo a equivalência entre a categoria de módulos e a categoria das representações desses módulos.

**Palavras-chave:** álgebras de caminhos; módulos; equivalência de categorias.

### 1 Introdução

Para o que se trata nesse texto, vamos admitir que o leitor esteja familiarizado com a linguagem de teoria de anéis e ideais, bem como os principais resultados relativos a teoria de álgebra abstrata básica. A ideia do texto é apresentar o conceito de álgebras de caminhos, a noção de categoria e funtores e focar a atenção na equivalência existente entre a categoria de módulos sobre uma álgebra de caminhos e a categorias de representações de uma aljava (um grafo orientado que dá origem à álgebra de caminhos). Não há nada de inédito no texto, mas há muita teoria algébrica envolvida nos resultados apresentados e que foram estudados ao longo dos últimos 12 meses. A abordagem foca apenas construir as ferramentas básicas para a exposição da equivalência entre a categoria de módulos finitamente gerados sobre uma álgebra de caminhos e a categoria das representações de sua aljava da álgebra. Maiores detalhes técnicos podem ser encontrados facilmente na literatura, mas [ANDERSON; FULLER, 1991], [ASSEM;SIMSON;SKOWRONSKI, 2006],[COELHO,1992], [CAMERON, 2008] e [LEINSTER,2014], servem como referências básicas para um bom estudo sobre o tema.

### 2 Álgebra finitamente gerada e introdução à teoria de módulos

**Definição 1** (Álgebra). Seja  $k$  um corpo. Uma  $k$ -álgebra, ou álgebra sobre  $k$ , é um anel  $A$  com identidade tal que  $A$  tem estrutura de espaço vetorial sobre  $k$  compatível com a multiplicação do anel, isto é, tal que

$$\lambda(ab) = (a\lambda)b = a(\lambda b) = (ab)\lambda, \text{ para todo } \lambda \in k, a, b \in A.$$

<sup>1</sup>Durante a realização desse trabalho o autor recebeu suporte do CNPq por meio da bolsa de Iniciação Científica através do PIC-OBMEP.

Uma  $k$ -álgebra  $A$  é dita finitamente gerada, ou de dimensão finita, se a dimensão  $\dim_k A$  do  $k$ -espaço vetorial  $A$  é finita.

**Definição 2** (Subálgebra). Seja  $k$  um corpo. Uma subálgebra  $B$  de uma  $k$ -álgebra  $A$  é um subconjunto  $B \subseteq A$  que possui estrutura de álgebra sobre  $k$ .

**Definição 3** (Homomorfismo de  $k$ -álgebras). Seja  $k$  um corpo e  $A$  e  $B$   $k$ -álgebras. Um homomorfismo de  $k$ -álgebras  $\phi$  de uma  $k$ -álgebra  $A$  em uma  $k$ -álgebra  $B$  é uma função  $\phi : A \rightarrow B$  que é um homomorfismo de anéis e também uma transformação linear, ou seja, que cumpre as seguintes propriedades:

$$\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b), \text{ para todo } a, b \in A;$$

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b), \text{ para todo } a, b \in A;$$

$$\phi(\lambda a) = \lambda\phi(a), \text{ para todo } a \in A, \lambda \in k.$$

**Definição 4.** Seja  $A$  uma  $k$ -álgebra comutativa. O Radical de Jacobson de  $A$ , denotado por  $\text{Rad}(A)$  é a intersecção dos ideais maximais de  $A$ .

**Definição 5** (Módulo). Seja  $k$  um corpo e  $A$  uma  $k$ -álgebra. Um  $A$ -módulo à esquerda, ou um módulo sobre  $A$  à esquerda, é um conjunto  $M$  com estrutura de  $k$ -espaço vetorial e com uma operação binária satisfazendo as condições:

$$am \in M, \text{ para todo } m \in M, a \in A;$$

$$a(m + n) = am + an, \text{ para todo } m, n \in M, a \in A;$$

$$(a + b)m = am + bm, \text{ para todo } m \in M, a, b \in A;$$

$$(ab)m = a(bm), \text{ para todo } m \in M, a, b \in A;$$

$$(1_A)m = m, \text{ para todo } m \in M;$$

$$(\lambda a)m = \lambda(am) = (a\lambda)m, \text{ para todo } m \in M, a \in A, \lambda \in k.$$

Um  $A$ -módulo à direita é definido de maneira análoga.

**Definição 6** (Submódulo). Seja  $k$  um corpo e  $A$  uma  $k$ -álgebra. Um  $A$ -submódulo à esquerda  $N$  de um  $A$ -módulo à esquerda  $M$  é um subconjunto  $N \subseteq M$  que possui estrutura de  $A$ -módulo à esquerda.

Um  $A$ -submódulo à direita é definido de maneira análoga.

**Definição 7** (Homomorfismo de  $A$ -módulos à esquerda). Seja  $k$  um corpo,  $A$  uma  $k$ -álgebra e  $M$  e  $N$   $A$ -módulos à esquerda. Um homomorfismo de  $A$ -módulos à esquerda  $\phi$  de um  $A$ -módulo à esquerda  $M$  em um  $A$ -módulo à esquerda  $N$  é uma função  $\phi : M \rightarrow N$  que cumpre as seguintes propriedades:

$$\phi(m + n) = \phi(m) + \phi(n), \text{ para todo } m, n \in M;$$

$$\phi(am) = a\phi(m), \text{ para todo } m \in M, a \in A.$$

**Definição 8.** Seja  $A$  uma  $k$ -álgebra comutativa e  $M$  um  $A$ -módulo. O anulador de  $M$ , denotado por  $\text{Anul}(M)$  é o conjunto dos elementos de  $A$  tais que o produto com todos os elementos de  $M$  é igual a 0, isto é,

$$\text{Anul}(M) = \{a \in A; am = 0 \text{ para todo } m \in M\}.$$

**Definição 9.** Seja  $k$  um corpo,  $A$  uma  $k$ -álgebra e  $M$  um  $A$ -módulo. Dizemos que  $M$  é simples se não possui submódulos diferentes de  $0 = \{0\}$ .

**Teorema 10.** *Seja  $A$  uma  $k$ -álgebra. Então  $\text{Rad}(A)$  é a intersecção dos anuladores do  $A$ -módulos simples.*

*Prova.* Suponha  $x \in \text{Rad}(A)$ , então  $x \in \bigcap I_j$ , onde cada  $I_j$  é um ideal maximal de  $A$ .

Considere um  $A$ -módulo  $S$  simples e seja  $s \in S$ ,  $s \neq 0$ , então  $As = \{as \in M; \text{ para todo } a \in A\}$  é um submódulo de  $S$ , mas sendo  $S$  simples e  $s \neq 0$ , temos que  $As = S$ .

Definindo  $f : A \rightarrow S = As$  dada por  $a \mapsto as$  um homomorfismo, temos que  $\text{Ker}(f) = \text{Anul}(As)$ , pelos teoremas da Correspondência de ideias e do Isomorfismo temos que  $A/\text{Ker}(f) \cong S$ , logo  $\text{Ker}(f) = \text{Anul}(S)$  é maximal, logo  $x \in \text{Anul}(S)$ , assim  $x \in \bigcap \text{Anul}(S_j)$ , onde cada  $S_j$  é um  $A$ -módulo simples.

Suponha, por outro lado,  $x \in I$ , com  $I$  um ideal maximal de  $A$ , então  $x \in \text{Anul}(A/I)$ , mas  $A/I$  é simples pelo teorema da correspondência de ideais, logo  $I \subseteq \text{Anul}(A/I)$ , como  $I$  é maximal, então  $\text{Anul}(A/I) \subseteq I$ . □

## 2.1 Álgebras de Caminhos

**Definição 11.** Uma aljava  $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$  é uma 4-upla consistindo de dois conjuntos:  $Q_0$ , cujos elementos são chamados de pontos ou vértices, e  $Q_1$ , cujos elementos são chamados de flechas ou arestas, e duas funções  $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$  que associa a cada flecha  $\alpha \in Q_1$  a sua origem  $s(\alpha) \in Q_0$ , do inglês *source*, e o seu alvo  $t(\alpha) \in Q_0$ , do inglês *target*, respectivamente.

Uma flecha  $\alpha$  com origem em  $a$  e alvo em  $b$  é normalmente denotada por  $\alpha : a \rightarrow b$ . Uma aljava  $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$  é geralmente denotada simplesmente por  $Q$ . Se  $Q_0$  e  $Q_1$  forem conjuntos finitos, então a aljava  $Q$  é chamada finita.

Uma aljava é um grafo orientado no qual não há restrições quanto ao número de flechas entre dois pontos, quanto à existência de laços os ciclos fechados. Para cada aljava  $Q$  existe um grafo  $\overline{Q}$  a representando, obtido ao se desconsiderar a orientação das flechas, quando este grafo é conexo, dizemos que a aljava é conexa.

Quando descrevemos visualmente uma aljava, representamos cada ponto por uma pequena circunferência e cada flecha apontando para o seu alvo.

**Definição 12.** Seja  $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$  uma aljava e  $a, b \in Q_0$ . Um caminho de comprimento  $l \geq 1$  com origem em  $a$  e alvo em  $b$ , ou de  $a$  em  $b$ , é uma sequência

$$(b|\alpha_l \dots \alpha_1|a)$$

onde  $\alpha_k \in Q_1$  para todos  $1 \leq k \leq l$ , e  $s(\alpha_1) = a$ ,  $t(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1})$  para cada  $1 \leq k < l$  e  $t(\alpha_l) = b$ .

Tais caminhos são denotados brevemente por  $\alpha_l \dots \alpha_1$  e representado visualmente por

$$a = a_0 \xrightarrow{\alpha_1} a_1 \xrightarrow{\alpha_2} a_2 \xrightarrow{\alpha_3} \dots \xrightarrow{\alpha_l} a_l = b$$

Para cada  $a \in Q_0$  associamos um caminho de comprimento  $l = 0$ , chamado de caminho trivial ou caminho estacionário, e denotamos por

$$\epsilon_a = (a||a).$$

Quando um caminho não trivial tem mesma origem e mesmo alvo, dizemos que é um ciclo, ou circuito, orientado.

**Definição 13.** Seja  $Q$  uma aljava. O conjunto dos caminhos de comprimento  $l$  em  $Q$  é denotado por  $Q_l$ .

É imediato que os elementos de  $Q_0$  e os caminhos de comprimento  $l = 0$  estão em uma correspondência biunívoca, assim como os elementos de  $Q_1$  e os caminhos de comprimento  $l = 1$ .

**Definição 14.** Seja  $Q$  uma aljava. Um caminho em  $Q$  de comprimento  $l \geq 1$  é chamado de ciclo quando sua origem e seu alvo coincidem. Um ciclo de comprimento  $l = 1$  é chamado de laço. Uma aljava que não contém ciclos é dita acíclica.

**Definição 15.** Seja  $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$  uma aljava. Uma sub aljava da aljava  $Q$  é uma aljava  $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', t')$  na qual  $Q'_0 \subseteq Q_0$ ,  $Q'_1 \subseteq Q_1$ , e  $s'$  e  $t'$  são as restrições de  $s$  e  $t$  a  $Q'_1$ , respectivamente.

Uma sub aljava  $Q'$  de  $Q$  é dita plena quando dada uma flecha  $\alpha \in Q_1$  com  $\alpha : a \rightarrow b$  e  $a, b \in Q'_0$ , então  $\alpha \in Q'_1$ .

Antes de definirmos propriamente as álgebras de caminhos, precisamos da noção de caminho não orientado entre dois pontos. Para isto, definimos uma flecha inversa para cada flecha de uma aljava.

**Definição 16.** Seja  $Q$  uma aljava. Para cada elemento  $\alpha : a \rightarrow b$  definimos a flecha inversa de  $\alpha$ ,  $\alpha^{-1} : b \rightarrow a$ .

**Definição 17.** Seja  $Q$  uma aljava. Um passeio, ou um caminho não orientado, de comprimento  $l \geq 1$  de  $a$  em  $b$  em  $Q$  é uma sequência

$$\alpha_l^{\gamma_l} \dots \alpha_1^{\gamma_1}$$

com  $\gamma_j \in \{1, -1\}$  para todo  $1 \leq j \leq l$ ,  $s(\alpha_1^{\gamma_1}) = a$ ,  $t(\alpha_l^{\gamma_l}) = b$  e  $t(\alpha_j^{\gamma_j}) = s(\alpha_{j+1}^{\gamma_{j+1}})$  para todo  $1 \leq j < l$ .

**Definição 18.** Seja  $k$  um corpo e  $Q$  uma aljava. A álgebra de caminhos  $kQ$  de  $Q$  é a  $k$ -álgebra cujo  $k$ -espaço vetorial relacionado tem como base o conjunto de todos os caminhos  $(b|\alpha_l \dots \alpha_1|a)$  de comprimento  $l \geq 0$  em  $Q$  e tal que o produto de dois elementos da base  $(b|\alpha_l \dots \alpha_1|a)$  e  $(d|\beta_r \dots \beta_1|c)$  de  $kQ$  é definido por

$$(d|\beta_r \dots \beta_1|c)(b|\alpha_l \dots \alpha_1|a) = \begin{cases} (d|\beta_r \dots \beta_1 \alpha_l \dots \alpha_1|a) & \text{se } t(\alpha_l) = s(\beta_1); \\ 0 & \text{se } t(\alpha_l) \neq s(\beta_1). \end{cases}$$

O produto dos elementos das bases é então estendido para elementos arbitrários de  $kQ$  por linearidade.

**Teorema 19.** *Se  $Q$  é uma aljava finita, então a álgebra  $kQ$  é de dimensão finita se, e somente se,  $Q$  não possuir circuitos orientados.*

*Prova.* Provaremos este teorema demonstrando as contra positivas equivalentes das implicações.

Suponha que  $Q$  possua um circuito orientado  $\alpha$ , desta maneira os caminhos

$$\alpha^n = \underbrace{\alpha\alpha \dots \alpha}_{n \text{ vezes}}$$

pertencem à base de  $kQ$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , e portanto  $kQ$  tem dimensão infinita.

Agora suponha que  $kQ$  tem dimensão infinita, então a sua base deve conter infinitos caminhos, mas a aljava  $Q$  só tem um número finito de flechas, logo existirão caminhos de comprimento tão grande quanto se desejar, o que só é possível se o caminho for um circuito fechado.  $\square$

**Definição 20.** Seja  $Q$  uma aljava e  $k$  um corpo. Denotamos por  $J_Q$  o ideal de  $kQ$  gerado por todas as flechas de  $Q$ . Um ideal  $I$  de  $kQ$  é admissível se existir um  $n > 0$  tal que  $(J_Q)^n \subseteq I \subseteq (J_Q)^2$ .

Algumas consequências desta definição são:

- Se  $Q$  é uma aljava finita sem circuitos orientados, então todo ideal de  $kQ$  contido em  $(J_Q)^2$  é admissível;
- Se  $I$  é um ideal admissível de  $kQ$  para alguma aljava  $Q$ , então existem um número natural  $n$  tal que todo caminho de  $kQ$  de comprimento maior ou igual a  $n$  está em  $I$ ;
- Se  $Q$  é uma aljava finita e  $I$  um ideal admissível de  $kQ$ , então  $\frac{kQ}{I}$  é de dimensão finita sobre  $k$ .

**Definição 21.** Uma relação  $\rho$  em  $Q$  é uma combinação linear de caminhos de comprimento maior ou igual a dois, todos eles com mesma origem e mesmo alvo.

**Definição 22.** Um conjunto  $E$  contido em um ideal admissível  $R$  de  $kQ$  é um sistema de relações de  $R$  se  $E$  for um conjunto gerador de  $R$  e todo elemento de  $E$  for uma relação.

**Definição 23.** Uma aljava com relações  $(Q, R)$  é dada por uma aljava e um sistema de relações de um ideal admissível de  $kQ$ . A álgebra de caminhos dada por uma aljava com relações  $(k, Q)$  é a álgebra  $\frac{kQ}{R}$ .

### 3 Introdução à teoria de Categorias e Funtores

**Definição 24.** Uma categoria  $\mathcal{A}$  consiste em:

- uma coleção  $obj(\mathcal{A})$  de objetos;
- para cada par  $(A, B) \in obj(\mathcal{A}) \times obj(\mathcal{A})$ , uma coleção  $\mathcal{A}(A, B)$  de (homo)morfismos ou flechas de  $A$  em  $B$ ;
- para cada  $A, B, C \in obj(\mathcal{A})$ , uma aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(A, B) \times \mathcal{A}(B, C) &\rightarrow \mathcal{A}(A, C) \\ (f, g) &\mapsto g \circ f; \end{aligned}$$

chamada composição, satisfazendo o axioma:

$$\text{para cada } f \in \mathcal{A}(A, B), g \in \mathcal{A}(B, C), h \in \mathcal{A}(C, D), \text{ temos } h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f;$$

- para cada elemento  $A \in obj(\mathcal{A})$  um elemento  $1_A \in \mathcal{A}(A, A)$ , chamado de identidade de  $A$ , satisfazendo o axioma:

$$\text{para cada } f \in \mathcal{A}(A, B), \text{ temos } f \circ 1_A = f = 1_B \circ f.$$

Usualmente denota-se

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{A} &\text{ para } A \in obj(\mathcal{A}); \\ f : A \rightarrow B &\text{ para } f \in \mathcal{A}(A, B); \\ gf &\text{ para } g \circ f. \end{aligned}$$

Se  $f \in \mathcal{A}(A, B)$ , chamamos  $A$  de domínio de  $f$ , denotando por  $A = dom(f)$ , e chamamos  $B$  de codomínio de  $f$ , denotando por  $cod(f)$ .

Em Teoria de Categorias é usual a notação em diagramas comutativos. Por exemplo, dados objetos e aplicações (flechas) em uma categoria, dizemos que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow h & & \downarrow g \\ C & \xrightarrow{i} D \xrightarrow{j} & E \end{array}$$

é comutativo, ou que comuta, quando  $g \circ f = j \circ i \circ h$ .

**Definição 25.** Uma flecha  $f : A \rightarrow B$  em uma categoria  $\mathcal{A}$  é dita um isomorfismo quando existe uma flecha  $g : B \rightarrow A$  em  $\mathcal{A}$  tal que  $g \circ f = 1_A$  e  $f \circ g = 1_B$ .

Nestas condições chamamos  $g$  de inversa de  $f$ , denotando por  $g = f^{-1}$ . Além disto, se existe um isomorfismo entre  $A$  e  $B$  dizemos que  $A$  e  $B$  são isomorfos, denotando por  $A \cong B$ .

**Definição 26.** Sejam  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  categorias. Um funtor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  consiste em:

- uma função  $obj(\mathcal{A}) \rightarrow obj(\mathcal{B})$  dada por  $A \mapsto F(A)$ ;

- para cada  $A, A' \in \mathcal{A}$ , uma função  $(A, A') \rightarrow \mathcal{B}(F(A), F(A'))$  dada por  $f \mapsto F(f)$ , satisfazendo os axiomas:

$$F(f' \circ f) = F(f') \circ F(f) \text{ sempre que } f : A \rightarrow A' \text{ e } f' : A' \rightarrow A'';$$

$$F(1_A) = 1_{F(A)} \text{ sempre que } A \in \mathcal{A}.$$

Funtores são um tipo de morfismo, então é natural esperar que existe uma noção de composição entre eles. De fato, dados funtores

$$\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$$

existe um funtor composto

$$\mathcal{A} \xrightarrow{G \circ F} \mathcal{C}$$

definido por  $(G \circ F)(A) = G(F(A))$  para todo  $A \in \mathcal{A}$  e  $(G \circ F)(f) = G(F(f))$  para todo  $A, A' \in \mathcal{A}$  e todo  $f \in \mathcal{A}, \mathcal{A}'$ .

Em uma categoria  $\mathcal{A}$  também está definido um funtor identidade

$$\mathcal{A} \xrightarrow{1_{\mathcal{A}}} \mathcal{A},$$

definido por  $1_{\mathcal{A}}(A) = A$  e  $1_{\mathcal{A}}(f) = f$  para todo  $A' \in \mathcal{A}$  e todo  $f \in \mathcal{A}(A, A')$ .

Com esta noção de composição entre funtores é possível construir uma categoria na qual os objetos são categorias e os morfismos são funtores entre as categorias, denotada por **CAT**.

## 4 Equivalência de categorias e transformações naturais

**Definição 27.** Sejam  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  categorias e sejam  $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  funtores. Uma transformação natural  $\alpha : F \rightarrow G$  é uma família  $(\alpha_A : F(A) \rightarrow G(A))_{A \in \mathcal{A}}$  de flechas em  $\mathcal{B}$  tal que para cada flecha  $f : A \rightarrow A'$  em  $\mathcal{A}$ , temos que:

$$\alpha_{A'} \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_A.$$

Equivalentemente, dizemos que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(A') \\ \downarrow \alpha_A & & \downarrow \alpha_{A'} \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(A') \end{array}$$

As flechas  $\alpha_A$  são chamadas de componentes de  $\alpha$ .

Transformações naturais são um tipo de aplicação (flecha), entre funtores, então é “natural” esperar que existe uma noção de composição entre elas. De fato, dadas transformações naturais  $\alpha : F \rightarrow G$  e  $\beta : G \rightarrow H$ , definida por  $(\beta \circ \alpha)_A = \beta_A \circ \alpha_A$  para todo  $A \in \mathcal{A}$ . Também

há uma transformação natural identidade para qualquer funtor  $F$ , definida por  $(1_F)_A = 1_{F(A)}$  para todo  $A \in \mathcal{A}$ .

Com esta noção de composição entre transformações naturais, dadas  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  categorias, é possível construir uma categoria na qual os objetos são funtores de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{B}$  e os morfismos são transformações naturais entre os funtores, denotada por  $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$  e chamada de categoria de funtores.

**Definição 28.** Sejam  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  categorias. Um isomorfismo natural entre dois funtores de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{B}$  é um isomorfismo em  $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ .

**Definição 29.** Uma equivalência entre categorias  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  consiste em um par de funtores  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  e  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  com isomorfismos naturais  $\phi : 1_{\mathcal{A}} \rightarrow G \circ F$  e  $\psi : F \circ G \rightarrow 1_{\mathcal{B}}$ .

Neste caso dizemos que  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  são equivalentes e escrevemos  $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$  e dizemos que  $F$  e  $G$  são equivalências.

## 5 Categoria de representações de módulos e a equivalência com a categoria de módulos

### 5.1 Categoria de representações de módulos

**Definição 30.** Seja  $(Q, R)$  uma aljava com relações e  $k$  um corpo. Uma  $k$ -representação de  $Q$  é dada por

$$V = ((V_i)_{i \in Q_0}, (f_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$$

onde para cada  $i \in Q_0$ ,  $V_i$  é um espaço vetorial de dimensão finita sobre  $k$  e para cada  $\alpha \in Q_1$  com  $\alpha : a \rightarrow b$ ,  $f_\alpha$  é uma transformação linear de  $V_a$  em  $V_b$ .

É necessário levar em consideração as relações de  $Q$ . Por isto, dada uma representação  $V = ((V_i)_{i \in Q_0}, (f_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$  e um caminho não trivial de  $Q$ ,  $\beta = (j | \alpha_n \dots \alpha_1 | i)$ , definimos  $V(\beta)$  como a transformação linear de  $V_i$  em  $V_j$  dada pela composta  $f_{\alpha_n} \dots f_{\alpha_1}$ .

Esta definição pode ser estendida para uma combinação linear de caminhos. Por isto, se  $\rho = \sum_{\beta} \lambda_{\beta} \beta$  for uma relação de  $i$  em  $j$ , então

$$V(\rho) = \left( \sum_{\beta} \lambda_{\beta} V(\beta) \right) : V_i \rightarrow V_j$$

também é uma transformação linear, já que é uma combinação linear de transformações lineares de mesmo domínio e mesmo contradomínio.

**Definição 31.** Dizemos que a representação  $V$  de  $Q$  satisfaz uma relação  $\rho$  se  $V(\rho) = 0$  e  $V$  satisfaz o sistema de relações  $R$  se satisfazer cada relação  $\rho$  de  $R$ . Uma representação de  $(Q, R)$  é uma representação de  $Q$  que satisfaz o sistema de relações  $R$ .

Como nosso interesse é definir uma categoria de representações de  $(Q, R)$  nos falta definir morfismos entre estas representações.

**Definição 32.** Dadas duas representações  $V = ((V_i)_{i \in Q_0}, (f_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$  e  $W = ((W_i)_{i \in Q_0}, (g_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$  de  $(Q, R)$ , um morfismo  $\phi : V \rightarrow W$  é dado por uma família de transformações lineares  $\phi = (\phi_i)_{i \in Q_0}$  tal que para cada flecha  $\alpha : i \rightarrow j$  o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{f_\alpha} & V_j \\ \downarrow \phi_i & & \downarrow \phi_j \\ W_i & \xrightarrow{g_\alpha} & W_j \end{array}$$

isto é,

$$\phi_j f_\alpha = g_\alpha \phi_i.$$

A composição de morfismo é definida coordenada a coordenada. Com isto temos a categoria  $\text{mod}(Q, R)$  com seus objetos sendo as representações de  $(Q, R)$  e os morfismos dados acima.

## 5.2 A equivalência entre $\text{mod}(Q, R)$ e $\text{mod}A$

**Teorema 33.** Seja  $(Q, R)$  uma aljava com relações,  $K$  um corpo e  $A$  a álgebra  $\frac{kQ}{R}$ . Então as categorias  $\text{mod}A$  e  $\text{mod}(Q, R)$  são equivalentes.

*Prova.* Para mostrar a equivalência, precisamos encontrar funtores  $F : \text{mod}A \rightarrow \text{mod}(Q, R)$  e  $G : \text{mod}(Q, R) \rightarrow \text{mod}A$  tais que  $FG \cong \text{Id}_{\text{mod}(Q, R)}$  e  $GF \cong \text{Id}_{\text{mod}A}$ .

Primeiramente, definiremos o funtor  $F$ . Seja então  $M \in \text{mod}A$ . Vamos definir a representação  $F(M) \in \text{mod}(Q, R)$ . Para cada  $i \in Q_0$  seja  $V_i = \bar{\epsilon}_i M$ , onde  $\bar{\epsilon}_i = \epsilon_i + R \in \frac{kQ}{R}$ . Como  $M$  é um módulo finitamente gerado, segue que  $V_i$  é um  $K$ -espaço vetorial de dimensão finita.

Seja  $\alpha \in Q_1$ , seja  $f_\alpha : V_{s(\alpha)} \rightarrow V_{t(\alpha)}$  definida por  $x \mapsto \bar{\alpha}x$ . Desta maneira  $f_\alpha$  está bem definida, pois se  $x \in V_{s(\alpha)}$ , então  $x = \bar{\epsilon}_{s(\alpha)} m$  para algum  $m \in M$  e portanto  $\bar{\alpha}x = \bar{\alpha}\bar{\epsilon}_{s(\alpha)} m = \bar{\epsilon}_{t(\alpha)} \bar{\alpha} m \in V_{t(\alpha)}$ . Como  $M$  é um  $A$ -módulo, segue que  $f_\alpha$  é uma transformação linear.

Seja  $\rho = \sum_\beta \lambda_\beta \beta$  uma relação em  $R$  de  $i$  em  $j$  e suponha  $\beta = \alpha_n \dots \alpha_1$ . Para  $x \in V_i$ , temos

$$\begin{aligned} V(\rho)(x) &= \sum_\beta \lambda_\beta V(\beta)(x) \\ &= \sum_\beta \lambda_\beta f_{\alpha_n} \dots f_{\alpha_1}(x) \\ &= \sum_\beta \lambda_\beta \bar{\alpha}_n \dots \bar{\alpha}_1 x \\ &= \left( \sum_\beta \lambda_\beta \bar{\beta} \right) x \end{aligned}$$

$$= \bar{\rho}x$$

$$= 0,$$

e então  $v(\rho) = 0$  para qualquer relação  $\rho \in R$ . Desta maneira definimos a representação de  $M \in \text{mod}A$  como  $F(M) = ((\bar{\epsilon}_i M)_{i \in Q_0}, (\bar{\alpha})_{\alpha \in Q_1}) \in \text{mod}(Q, R)$ .

Seja  $\phi : M \rightarrow M'$  um morfismo. Vamos definir  $F(\phi) : F(M) \rightarrow F(M')$ . Como  $\phi$  é um homomorfismo de módulos, temos que  $\phi(\bar{\epsilon}_i x) = \bar{\epsilon}_i \phi(x)$  pois  $\bar{\epsilon}_i \in A$ , então definimos  $\phi_i$  como sendo a restrição de  $\phi$  a  $V_i$ , portanto se  $\alpha \in Q_1$  com  $\alpha : i \rightarrow j$ , temos

$$\begin{aligned} \phi_j f_\alpha(\bar{\epsilon}_i x) &= \phi_j(\bar{\alpha} \bar{\epsilon}_i x) \\ &= \phi_j(\bar{\epsilon}_j \bar{\alpha} x) \\ &= \bar{\epsilon}_j \bar{\alpha} \phi(x) \\ &= \bar{\alpha} \bar{\epsilon}_i \phi(x) \\ &= g_\alpha(\bar{\epsilon}_i \phi(x)) \\ &= g_\alpha \phi_i(\bar{\epsilon}_i x), \end{aligned}$$

logo o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{f_\alpha} & V_j \\ \downarrow \phi_i & & \downarrow \phi_j \\ W_i & \xrightarrow{g_\alpha} & W_j \end{array}$$

Agora, definiremos o funtor  $G$ . Seja  $V = ((V_i)_i, (f_\alpha)_\alpha) \in \text{mod}(Q, R)$ . Consideremos o  $kQ$ -espaço vetorial  $M = \bigoplus_{i \in Q_0} V_i$ , vamos definir uma estrutura de  $A$ -módulo em  $M$ .

Sejam  $m \in M$ ,  $m = (m_1, \dots, m_r)$ ,  $m_i \in V_i$ ,  $Q_0 = \{1, \dots, r\}$ . Vamos definir a ação de  $kQ$  em  $M$ . Para os caminhos triviais, definimos  $\epsilon_i m$  como sendo a  $i$ -ésima coordenada  $m_i$  de  $m$ . Seja agora um caminho em  $Q$  de  $i$  em  $j$ . Pela definição,  $V(\beta)(m_i)$  é um elemento de  $V_j$  quando  $m_i \in V_i$ . Definimos então  $\beta m$  como sendo o elemento de  $M$  com coordenadas dadas por  $(\beta m)_l = \delta_{lj} V(\beta)(m_i)$ , escrevemos também  $\beta m = V(\beta)(m_i)$ . Além disto, se  $\rho \in R$ , então  $\rho m = 0$  já que  $V$  satisfaz  $\rho$ . Finalmente, definimos  $\bar{\lambda} m = \lambda m$  para todo  $\lambda \in kQ$ . Desta maneira,  $G(V) = M \in \text{mod}\left(\frac{kQ}{R}\right)$ .

Agora, seja  $\phi = (\phi_i) : V = ((V_i)_i, (f_\alpha)_\alpha) \rightarrow W = ((W_i)_i, (g_\alpha)_\alpha)$ . Como  $G(V) = \bigoplus_{i \in Q_0} V_i$  e  $G(W) = \bigoplus_{i \in Q_0} W_i$ , definimos  $G(\phi)$  naturalmente como sendo  $\phi = (\phi_{ij}) : G(V) \rightarrow G(W)$ , onde  $\phi_{ij} = \delta_{ij} \phi_i$ . Como  $\phi$  é um morfismo de representações, segue que  $G(\phi)$  é um morfismo de  $\frac{kQ}{R}$ -módulos.

Segue da definição que os funtores  $F$  e  $G$  que  $FG \cong Id_{\text{mod}(Q, R)}$  e  $GF \cong Id_{\text{mod}A}$ . Ou seja, as categorias  $\text{mod}(Q, R)$  e  $\text{mod}A$  são equivalentes.  $\square$

Em vista dessa equivalências, resultados sobre  $\text{mod}A$  podem ser obtido através de suas

representações e, através da aljava de  $A$ , é possível compreender melhor como é a ação da álgebra  $A$  sobre os módulos da categoria  $modA$ .

## Referências

- ANDERSON, Frank W.; FULLER, Kent R.. **Rings and Categories of Modules**. Nova York: Spring Verlag, 1991.
- ASSEM, Ibrahim; SIMSON, Daniel; SKOWRONSKI, Andrzej. **Elements of the Representation Theory of Associative Algebras**. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
- CAMERON, Peter Jephson. **Introduction to Algebra**. Oxford: Oxford University Press, 2008.
- COELHO, Flávio Ulhoa **Uma Introdução à Teoria de Representações de Álgebras**. XII - ESCOLA DE ÁLGEBRA, Diamantina. 1992, 63 p.
- FAITH, Carl. **Algebra: Rings, Modules and Categories I**. Nova York: Spring Verlag, 1973.
- FAITH, Carl. **Algebra II: Ring Theory**. Nova York: Spring Verlag, 1976.
- LEINSTER, Tom. **Basic Category Theory**. Cambridge: Cambridge University Press, 2014.



## Algoritmos direcionados a jogos digitais: aplicações em inteligência artificial

Janaina Maria de Lima Gonçalves  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
userjanaina@gmail.com

Flavio Roberto Dias Silva  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
frdsilva@yahoo.com.br

**Resumo:** O presente artigo contém os resultados finais do trabalho de iniciação científica voluntária e tem por finalidade apresentar o desenvolvimento da inteligência artificial em um jogo digital. Para isso, é necessário conhecer as definições de inteligência artificial, como a fundamentação no mundo real e o desenvolvimento para aplicações em jogos digitais. Com este conhecimento, podemos construir algoritmos mais avançados e que poderão ser aplicados em um jogo digital, como forma de aproximar os jogos digitais à realidade e uma experiência única.

**Palavras-chave:** inteligência artificial; algoritmos; jogos digitais.

### 1 Introdução

Este artigo busca apresentar os estudos para o desenvolvimento de uma inteligência artificial, através de algoritmos que serão responsáveis pelo funcionamento de um jogo digital. A principal motivação e relevância para esse estudo é o crescimento tecnológico atual, como a evolução dos jogos digitais cada vez mais refinados artisticamente e em termos de programação.

Atualmente, existe uma preocupação em aproximar as narrativas dos jogos digitais à realidade. Diante disso, o desenvolvedor de um jogo, deve ter a preocupação de gerar experiências realísticas ao seu futuro jogador. Criando narrativas que podem ser vivenciadas pelo jogador de maneira única, assim sendo, uma experiência inexistente.

Os jogos digitais, se diferenciam em suas estruturas e, para cada uma, o desenvolvedor deve pensar na inteligência artificial que deverá ser implementada. Para isso, é preciso conhecer e saber aplicar os recursos de inteligência artificial. Então, é necessário ter algumas noções básicas de programação e conhecer a plataforma de criação de games, na qual será desenvolvida a implementação. Com isso, pode-se desenvolver a ideia de como é o funcionamento de um jogo.

## 2 Inteligência artificial

### 2.1 Definições

A Inteligência Artificial (IA) é o estudo de como fazer os computadores realizarem tarefas em que, no momento as pessoas são melhores. Esta definição varia ao longo de duas principais dimensões:

#### **Pensamento e raciocínio vs. Comportamento**

##### **Desempenho humano vs. Racionalidade**

Racionalidade, mede o conceito ideal de inteligência. Um sistema é racional se ele faz os processos corretamente, dado o que ele sabe.

Estas propostas de definição geram tensão entre si pois umas são centradas ao redor de humanos e outras centradas ao redor de racionalidade. Uma proposta centrada em humanos deve ser uma ciência empírica, envolvendo hipóteses e confirmações experimentais. Uma proposta racionalista envolve uma combinação de matemática e engenharia.

Algumas definições de inteligência artificial e estudo sobre, que forem citados, são baseados no livro de Norving e Russell (2002).

### **Agindo Humanamente**

#### **Comportamento vs. Racionalidade**

O teste de *Turing*, proposto por Alan Turing (1950), foi projetado para prover uma definição satisfatória de inteligência. Um computador passa no teste se um humano interrogador, depois de colocar algumas questões escritas, não conseguir distinguir respostas do computador da de pessoas. O computador deve ter as seguintes capacidades para passar no teste: processamento de linguagem natural, representação do conhecimento, raciocínio automatizado, aprendizado de máquina.

O teste de *Turing* requer também do computado outras capacidades como: visão computacional e robótica.

### **Pensando humanamente: modelagem cognitiva**

#### **Pensamento e raciocínio vs. Desempenho humano**

Para determinar para um programa como pensar humanamente, primeiro precisamos determinar como humanos pensam. Existem duas formas de fazer isto: através de introspecção e através de experimentos psicológicos. Quando se tem uma teoria precisa o suficiente sobre a

mente, se torna possível expressar essa teoria como um programa de computador. Se as entradas e saídas do programa e o tempo dos comportamentos correspondem com comportamentos humanos, é evidente que alguns mecanismos de programas podem também estar operando em humanos.

### **Pensando racionalmente: leis do pensamento**

#### **Pensamento e raciocínio vs. Racionalidade**

Aristóteles foi um dos primeiros a tentar codificar o “pensamento correto”, que é o raciocínio. Seu silogismo tem padrões para estruturas de argumentos, que reproduzem conclusões certas quando são corretas as premissas. Estas leis de pensamento eram supostas a governar a mente e com isso iniciou o campo lógica.

Existe uma dificuldade nessas leis, uma vez que deve ser enunciadas em conhecimento informal em lógica e o recursos computacionais são limitados.

### **Agindo racionalmente: agente racional**

#### **Comportamento vs. Racionalidade**

Um **agente** racional é algo que age de forma a alcançar o melhor resultado ou, quando em incerteza, o melhor resultado esperado. Agente tem várias definições, mas com algumas das características: controle autônomo, metas e planejamento, percepção do ambiente, persistência por período prolongado, colaboração, aprendizado e adaptação.

A sua abordagem incorpora “leis do pensamento”, no entanto não se limita a elas. As habilidades necessárias de um agente devem ser detectadas com teste de *Turing*.

## **2.2 Fundamentos da Inteligência artificial**

A inteligência artificial se fundamentou em diversas áreas do conhecimento, como serão mostradas a seguir:

### **Neurociência**

Chips de computador podem executar instruções em nanosegundos, enquanto neurônios são milhões de vezes mais lentos. *A lei de Moore* diz que o número de transistores por polegada quadrada dobra a cada 1 ou 1,5 ano. A capacidade do cérebro humana dobra a cada 2 a 4 milhões de anos.

## **Filosofia**

A filosofia tornou a inteligência artificial concebível, considerando as ideias que a mente é de alguma forma como uma máquina, que ela opera sobre conhecimento codificado em alguma linguagem interna, e que o pensamento pode ser usado para escolher quais ações executar.

## **Matemática**

A matemática criou ferramentas para manipular declarações de certezas lógicas bem como incertezas e declarações probabilísticas. Também configuraram a base para compreender computação e raciocínio sobre algoritmos. A decidibilidade: o que pode ser computado (*Church* e *Turing*); tratabilidade: o que pode ser computado em tempo razoável;

## **Economia**

Formalizaram o problema de tomada de decisões para a maximização de resultados, a fim de alcançar os objetivos esperado pelo o administrador.

## **Psicologia**

Na psicologia foi adotado a ideia de que humanos e animais podem ser considerados máquinas de processamento de informações.

## **Engenharia da computação**

Os engenheiros de computação proveram os artefatos que fazem as aplicações de IA possíveis. Programas de IA tendem a ser grandes, e eles podem não funcionar sem um grande avanço na velocidade e memória que a indústria de computadores tem provido.

A inteligência artificial foi pioneira em muitos trabalhos na área da ciência da computação, como *time sharing*, interpretadores interativos, computadores pessoais com janelas e mouse, ambientes de desenvolvimento rápido de aplicações, tipos de dados de listas encadeadas, gerenciamento automático de armazenamento e conceitos chaves de programação simbólica, funcional, dinâmica e orientada a objetos.

## **Teoria do controle e da cibernética**

A teoria do controle trata com projeto de dispositivos que agem opcionalmente na base de feedbacks do ambiente. Inicialmente, as ferramentas matemáticas de teoria do controle eram muito diferentes da IA, mas os campos estão ficando mais próximos.

## 2.3 Agentes

Um agente é qualquer coisa que pode perceber seu ambiente através de sensores e agir nesse ambiente por meio de atuadores. Um agente humano tem olhos, orelhas e outros órgãos como sensores, e mãos, pernas, boca e outras partes do corpo como atuadores. Um agente robô pode ter câmeras e localizadores infravermelho como sensores, e vários motores como atuadores. Um agente de software recebe entradas do teclado, conteúdo de arquivos e pacotes de rede como sensores de entrada e age no ambiente mostrando resultados na tela, gravando em arquivos e enviando pacotes pela rede.

Dizemos que um comportamento de agente é descrito por uma função de agente que mapeia qualquer dada sequência de percepções para uma ação.

## 3 Inteligência artificial aplicados em jogos digitais

Nas subseções a seguir serão descritas algumas aplicações de IA em jogos digitais, citados pelo autor Ribeiro et al. (2017).

### Estratégia

O jogo de estratégia tem como característica explorar as habilidades lógicas de um jogador. A inteligência em jogos de estratégia pode ser dividida em dois níveis:

- **Navegação de unidades:** geralmente utilizado algoritmo de vida artificial, ou alguma técnica que considere planejamento em tempo real.
- **Planejamento estratégico:** determina caminho de árvores, ritmos de produção, frequência de ataques, deslocamentos e posicionamento.

Nestes níveis podemos encontrar métodos aplicados como: máquinas de estados combinados com sistemas baseados em regras, permitindo ajuste de dificuldade e jogabilidade.

Do gênero estratégia, em destaque estão os jogos de tabuleiro, normalmente jogados por duas pessoas, mas que podem admitir um número arbitrário de participantes. Como jogos de tabuleiro mais populares podemos citar xadrez, damas, ludo e gamão.

O gênero de estratégia evoluiu de jogos de tabuleiro, como WAR, para os computadores. Como os computadores são capazes de anotar dados e dar informações em tempo real para o jogador, os jogos puderam atingir um novo grau de maturidade e dinamismo, tornando o gênero único.

Cronologicamente, os primeiros jogos de estratégia eram adaptações simples de jogos de tabuleiro e, por isso, ainda mantinham a característica de jogos baseados em turnos, ou seja, cada jogador pode realizar suas ações separadamente, enquanto o outro jogador aguarda. Jogos

baseados em turnos permitem ao jogador analisar o impacto de cada um de seus movimentos, olhar com cuidado o que seus oponentes estão fazendo e planejar meticulosamente as suas ações.

Os jogos de estratégia em tempo real (RTS) empregam um modelo de inteligência artificial hierárquico tendo seus programas divididos em camadas de decisão de estratégia e tática. A camada de estratégica possui módulos de planejamento, usando árvores para navegação entre recursos, matrizes e processamento de imagens para localização de problemas na formação do jogador ou mesmo partes do código desenhadas para definir derrota ou vitória. Já a camada tática, pode-se basear em máquinas de estado, lógica fuzzy e árvores de decisão para definir possíveis situações de ataque e defesa.

### **Sensoriamento do ambiente**

A modelagem de percepção é chave para a sustentação da ilusão de atenção de um agente. Estas modelagens tem o intuito de simular decisões lógicas dos sentidos, como audição, visão e olfato, de modo que um agente possa perceber um ambiente de forma similar à humana.

Estes eventos são acionados porque os dados do jogo são acessíveis pela inteligência artificial, entregando aos agentes um sensoriamento onipotente. Isto acontece pela não separação da percepção x realidade. Para prevenir estas inconsistências, os sentidos dos agentes devem ser filtrados, capacitando estes de forma consistente.

### **Path-Finding**

Path-finding, ou simplesmente navegação, é uma das aplicações mais corriqueiras em jogos eletrônicos.

Os métodos mais comuns de navegação são aqueles baseados em regras simples e com características reativas. Um exemplo deste tipo de mecanismo, conhecido como “crash and turn” pode ser descrito pelas seguintes regras:

- Verificar se a próxima posição em direção ao alvo está vazia; se estiver, mova-se.
- Senão, vire-se na direção cuja movimentação o coloque mais próximo de seu alvo. Se não houver uma escolha única, selecione uma aleatoriamente. Mova-se

Os agentes adquirem a propriedade da navegação sem que tenham qualquer conhecimento prévio do terreno por onde deverão se movimentar, o que demonstra a ausência da característica de aprendizagem. Este mecanismo pode, no entanto, ser estendido e sofisticado com o auxílio de técnicas de IA para se tornar verdadeiramente inteligente.

Uma alteração que proporciona uma significativa melhora no processo de navegação é a introdução de uma memória de mapeamento em cada agente. Através desta técnica, cada agente mantém em memória um mapa que é construído à medida que se movimenta pelo terreno ou

labirinto. Com isso, seu mecanismo de navegação pode ser incrementado com processos de busca semelhantes aos vistos na seção para selecionar previamente o melhor caminho rumo ao objetivo.

Num jogo digital o desenvolvedor dispõem de todas as informações que precisa para definir o mecanismo de navegação a ser empregado pelos agentes. Desta forma, possível construir um mecanismo relativamente simples e que “caça” seus alvos com precisão e eficiência absolutas. Essa onipresença de informações acerca do estado do jogo torna o uso do termo IA questionável, porque não estamos emulando um comportamento verdadeiramente humano em nosso agente.

Técnicas de IA, como a combinação de um sistema especialista auto-alimentado com modelos sensoriais, podem ser empregados em jogos que se proponham a simular o comportamento dos agentes tal como o de seres vivos.

## Combate

Uma situação muito comum em jogos, principalmente nos de ação e estratégia, é a presença de combates entre grupos de entidades onde, em geral, têm-se entidades controladas pelo jogador combatendo entidades computadorizadas. Nesses casos, os jogos precisam dispor de mecanismos que permitam controlar a forma como as entidades computadorizadas irão coordenar as ações e cooperar entre si, visando o objetivo maior que é frequentemente vencer o grupo inimigo. As entidades computadorizadas apresentam um comportamento aparentemente inteligente e através de uma simples análise, puramente empírica, é possível identificar alguns comportamentos básicos:

- **Cobertura:** quando uma entidade computadorizada está recarregando sua arma, as demais entidades fornecem cobertura, continuando a disparar contra o protagonista. Isso ocorre também quando uma entidade inimiga está “ferida”, situação onde entidades mais “saudáveis” tomam a frente do combate. Os inimigos tendem a se protegerem atrás de paredes, barris ou outros elementos do cenário durante o combate e enquanto recarregam suas armas a fim de evitar serem atingidos. Além disso, raramente os inimigos recarregam suas armas ao mesmo tempo ou em momentos muito próximos.
- **Recuo:** entidades computadorizadas ocasionalmente recuam, principalmente em situações onde detectam que estão em desvantagem. Outra situação onde as entidades recuam é quando estão feridas.
- **Avanço:** é caracterizado pelo aumento da agressividade e tomada de posição realizada pelas entidades computadorizadas quando detectam que estão em vantagem.

## 4 Algoritmos

Um algoritmo é qualquer procedimento computacional bem definido que toma algum valor ou conjunto de valores como entrada e produz algum valor ou conjunto de valores como

saída. Portanto um algoritmo é uma sequência de passos computacionais que transformam a entrada na saída.

Um algoritmo é dito correto se, para cada instância de entrada, ele para com a saída correta. Um algoritmo incorreto pode não parar em algumas instâncias de entrada, ou então pode parar com outra resposta que não a desejada. Estes algoritmos incorretos podem ser úteis, se sua taxa de erros pode ser controlada.

Um algoritmo pode ser especificado em linguagem comum, como um programa de computador, ou mesmo como um projeto de hardware. Estas definições foram citadas por Cormen et al. (2002).

## 4.1 Algoritmos aplicados em inteligência artificial

### Algoritmos de navegação

Os algoritmos de busca de caminho podem ser divididos em:

- **Busca cega:** é aquela em que o agente não tem conhecimento do cenário tendo apenas como indicador do caminho a sua frente os sensores e uma função objetivo que dita o melhor passo;
- **Busca informada:** o agente tem informação do ambiente em que se encontra, podendo formular uma solução, conectando o ponto de origem ao ponto de destino de forma mais certa;

Os algoritmos de navegação fazem parte de uma área mais desenvolvida e subdividida em um nível mais alto de abstração **Path-Finding** e **Obstacle Avoidance**.

### Algoritmos genéticos

Usam uma abordagem inspirada no processo de seleção natural e tentam imitar esse processo para evoluir até encontrar uma solução próxima e ótima para o problema. Assim como o processo de evolução humana, passam por etapas, citados em Branco et al. (2013) como:

- **Herança:** durante o processo de geração da próxima geração alguns genes são herdados do “pai” ou da “mãe”, portanto de forma aleatória é selecionada a origem de cada um.
- **Mutação:** alguns genes após o processo de herança formando o descendente canônicos são modificados para aumentar o fator aleatório da próxima geração.
- **Seleção:** segundo uma função objetivo que dita o quão bom uma solução é, alguns descendentes são eliminados ou selecionados.

- **Cruzamento:** assim como no processo de mutação alguns genes foram modificados, na etapa de cruzamento de cromossomos uma fatia do mesmo é trocada com outro cromossomo.

Algoritmos genéticos são úteis quando é difícil prever as interações entre o conjunto de parâmetros que regula o comportamento dos agentes e o mundo do jogo. No entanto, é necessário um bom esforço de tempo em modelagem e principalmente simulação para alcançar bons resultados.

## 5 Metodologia

Para o desenvolvimento deste artigo foi realizada uma extensa revisão bibliográfica em livros digitais, artigos científicos publicados com temas semelhantes e sites de internet. Foi realizado uma filtragem de informações, com o objetivo de apresentar informações concretas.

O passo seguinte foi a leitura e entendimento pleno do assunto para a dissertação e desenvolvimento desse artigo

## 6 Conclusão

O desenvolvimento da inteligência artificial é altamente importante em um jogo digital. Determinará se o jogo será denominado bom e de qualidade. Para isso, o desenvolvedor necessita de modelos e sistemas simples.

No entanto, o desenvolvedor deve conhecer os principais algoritmos de I.A., mas não é necessário sempre utilizá-los em todos os seus projetos. Deve apenas saber qual será o melhor algoritmo para um determinado momento.

Contudo, os avanços da inteligência artificial é um processo lento, gerando críticas aos seus desenvolvedores. Porém, o campo de pesquisas para avanços é muito grande e pode ser melhorado muito futuramente, promovendo cada vez mais a imersão nos jogos.

## Referências

- BRANCO, Marsal et al. Jogos eletrônicos na prática: livro de tutoriais do SBGames 2012. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013. 125 p.
- CORMEN, Thomas H. et al. Algoritmos: Teoria e prática. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2002.
- NORVING, Peter; RUSSELL, Stuart. Artificial Intelligence, A Modern Approach. 2. ed. : Prentice Hall, 2002. Tradução Editora Campus.
- RIBEIRO, Bruno et al. Inteligência Artificial em Jogos Digitais. Campinas. Disponível em: <http://www.dca.fee.unicamp.br/martino/disciplinas/ia369/trabalhos/t4g3>. Acesso em: 30 ago. 2017.



## Inversa de uma matriz particionada

Lucas Campos de Araújo  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste  
kopier\_business@hotmail.com

Fabiana Magda Garcia Papani  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste  
fgarciapapani@gmail.com

**Resumo:** Em muitas áreas do conhecimento e em diversos problemas importantes tais como problemas computacionais, estruturais e econômicos há necessidade de se realizar operações (entre elas o cálculo da matriz inversa) com matrizes de ordem elevada, o que pode vir a ser uma tarefa árdua. Computacionalmente falando, o elevado número de operações aritméticas envolvidas no processo e o acúmulo de erros de arredondamento pode nos levar a uma resposta totalmente equivocada, que invalidam todo trabalho. Assim valer-se não de um algoritmo que diminua consideravelmente o número de operações é de grande importância para a realização dos processos. Pretende-se neste breve trabalho apresentar uma maneira, associada à uma partição em blocos, de calcular a inversa de uma matriz não singular.

**Palavras-chave:** Partição em Blocos; Matrizes simétricas; Matriz bloco diagonal.

### 1 Introdução

Na contemporaneidade, existem diversas situações cotidianas envolvendo um agrupamento ordenado de informações em forma de tabelas ou quadros, na matemática, os denominamos por matrizes. O conceito de matriz é comumente utilizado para resolução de sistemas lineares de  $n$  equações e  $m$  incógnitas. Um sistema linear pode ser visto como um conjunto finito de equações lineares, cuja solução é uma sequência finita de números. Esses sistemas são utilizados na resolução de problemas das mais diversas áreas do conhecimento: engenharia, física e até mesmo economia. Na engenharia civil, por exemplo, os problemas relacionados a projetos de estruturas metálicas exigem a resolução de um sistema de equações lineares, no qual a matriz dos coeficientes deve ser invertível para que a estrutura não colapse. Quanto mais complexa a estrutura, maior será o número de equações e variáveis do sistema, logo maior será a matriz dos coeficientes e conseqüentemente o processo para encontrar a sua inversa demandará um maior trabalho.

Quando trabalhamos com matrizes de ordem elevada reescrevê-las como um conjunto de submatrizes, adequadamente construídas, poderá facilitar consideravelmente a utilização da matriz original em operações de adição, multiplicação e o cálculo de sua inversa, quando esta existir. Trabalhar com as matrizes particionadas em blocos, isto é, reescritas como um conjunto de submatrizes adequadas, diminuirá consideravelmente o número de operações envolvidas no

processo de resolução do problema. Esta diminuição no número de operações não deve ser vista como benéfica apenas por reduzir consideravelmente os cálculos, mas principalmente pelo fato de quando trabalhamos com sistemas “mal condicionados” - sistemas nos quais uma pequena diferença num coeficiente causa uma grande mudança nos resultados - o acúmulo de erros de arredondamento, ocorridos nas operações de multiplicação e divisão, pode nos levar a uma resposta inaceitável, como por exemplo a não existência da matriz inversa que se está procurando.

Neste sentido, este trabalho pretende apresentar o conceito de partição de uma matriz em blocos, destacando uma técnica para determinar matrizes inversas associada à partição em blocos. O trabalho está dividido em 3 partes. Primeiramente relembramos alguns conceitos e propriedades de matrizes úteis para o desenvolvimento do trabalho. Posteriormente, definimos partição de uma matriz e apresentamos algumas propriedades importantes. Finalmente, na última seção apresentamos um algoritmo para determinação da inversa de uma matriz não singular particionada em blocos.

## 2 Preliminares

Podemos entender uma Matriz como sendo uma tabela ordenada, com elementos em  $n$  linhas e  $m$  colunas. Assim uma matriz  $A$  do tipo  $n \times m$ , pode ser representada como se segue:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & \dots & a_{(n-1)m} \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Visto que, qualquer matriz  $A$  é representada por elementos ordenados em  $n$  linhas e  $m$  colunas, nota-se facilmente a possibilidade de existência de diversos tipos de matrizes como linha, coluna, nula, diagonal, entre outras. Neste trabalho focaremos em algumas matrizes especiais, as quais serão definidas a seguir.

**Definição 1** (Matriz Quadrada). Denomina-se de matriz quadrada, uma matriz  $A$  do tipo  $n \times m$  em que  $n = m$ , ou seja, o número linhas é igual ao número de colunas.

O determinante é o número associado a uma matriz  $A_{n \times n}$ , o qual se pode definir como sendo a soma de  $n!$  parcelas, em que cada parcela é formada por  $n$  fatores. Sendo que em cada fator temos um, e somente um, elemento de cada linha e coluna.

**Definição 2.** Se  $A$  é uma matriz quadrada inversível, então  $\det[A] \neq 0$ , caso contrário  $\det[A] = 0$ .

**Definição 3** (Matriz Diagonal). Denomina-se de matriz diagonal, uma matriz  $A = [a_{ij}]$  em que todos os elementos  $a_{ij}$  em que  $i \neq j$  são nulos.

**Definição 4** (Matriz Identidade). Denomina-se de matriz identidade  $I$ , a matriz  $A = [a_{ij}]$  em que todos os elementos do tipo  $a_{ij}$  com  $i = j$  tem valor numérico igual a 1 e se  $i \neq j$  então  $a_{ij} = 0$ .

**Definição 5** (Matriz Triangular). Denomina-se de matriz triangular, uma matriz  $A_{nn} = [a_{ij}]$  em que todos os elementos  $a_{ij}$  com  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, n$  situados de um dos lados da diagonal principal são nulos.

**Definição 6** (Matriz Inversa). Se dada uma matriz  $A_{n \times n}$  existir  $B_{n \times n}$ , tal que  $AB = BA = I_{n \times n}$  dizemos que  $A$  é inversível,  $B$  é a inversa de  $A$ ,  $I$  é o elemento neutro da multiplicação de matrizes, e denotamos  $B = A^{-1}$ . Se não existir  $B$  dizemos que  $A$  é singular, ou seja, não inversível.

**Observação:** Se  $AB = BA = I_{n \times n}$  então  $A$  é também inversa de  $B$ .

No trabalho com números reais  $a$  e  $b$ , tem-se sempre que  $ab = ba$ , o que se denomina de comutatividade da multiplicação. Entretanto, para matrizes, esta igualdade nem sempre existe, visto que esta pode falhar por três razões. Pode ocorrer do produto  $AB$  estar definido, mas o produto  $BA$  não, isto ocorre quando a matriz  $A$  é do tipo  $n \times m$  e a  $B$  é do tipo  $q \times p$  com  $m \neq q$ , neste caso, não se pode definir o produto  $BA$  visto que para o produto ser válido é necessário que o número de colunas da primeira seja igual ao número de linhas da segunda. Outro problema possível é que mesmo os produtos  $AB$  e  $BA$  estando definidos, estes podem ter tamanhos diferentes, por exemplo, se  $A$  é uma matriz  $3 \times 5$  e  $B$  uma matriz  $5 \times 3$   $AB \neq BA$ . Também, mesmo com os produtos  $AB$  e  $BA$  definidos e de mesma ordem ao menos um de seus elementos podem ser distintos.

Isto posto, podemos ter  $AB = I$ , mas  $BA \neq I$ . Nesse caso, dizemos que  $B$  é a inversa de  $A$  à direita, se for o contrário, ou seja,  $BA = I$  e  $AB \neq I$  então  $B$  será a inversa de  $A$  à esquerda.

No entanto encontrar a inversa de uma matriz pode ser uma tarefa árdua dependendo de sua ordem. Visto que em muitos problemas se trabalha com matrizes de ordem elevada, como citado no primeiro exemplo, logo é grande interesse valer-se mão de alternativas que diminuam este trabalho. Para estes casos pode-se fazer uso da partição em blocos, a qual consiste em reescrever a matriz original como um conjunto de submatrizes ordenadas adequadamente. Isto possibilita uma minimização do trabalho nas operações com a matriz.

Para calcular a inversa de uma matriz é necessário lembrar ter em mente o teorema a seguir.

**Definição 7.** Uma matriz  $A$  é singular se  $\det[A] = 0$ , caso contrário será não singular, ou seja,  $\det[A] \neq 0$ .

**Proposição 8.** Uma matriz  $A$  de ordem  $n$  é inversível se ela é não singular.

**Proposição 9.** A inversa de uma matriz, se existir, é única.

*Prova.* Sejam  $B$  e  $C$ , matrizes de ordem  $n \times n$ , inversas de uma matriz  $A_{n \times n}$ . Então

$$BA = AC = I_{n \times n}$$

Lembrando que a propriedade associativa é válida nas operações com matrizes, temos:

$$B = BI_{n \times n} = B(AC) = (BA)C = I_{n \times n} = C$$

□

Um algoritmo comumente utilizado para a determinação da inversa de uma matriz não singular, utiliza-se do conceito de cofator, o qual ver-se-á a seguir.

**Proposição 10.** *Seja  $A$  uma matriz de ordem  $n$  e  $Adj[A]$  a matriz adjunta de  $A$ , isto é, a transposta dos cofatores. Então  $A \cdot Adj[A] = det[A]I$ .*

Note que, tomando como hipótese que  $A^{-1}$  existe, tem-se que:

$$A^{-1}(A \cdot Adj[A]) = A^{-1}(det[A]I)$$

$$(A^{-1}A)Adj[A] = det[A](A^{-1}I)$$

$IAdj[A] = det[A]A^{-1}$ , como por hipótese  $A$  é inversível então  $det[A] \neq 0$ . Portanto

$$\frac{1}{det[A]}Adj[A] = A^{-1}$$

Assim, para calcularmos a inversa de uma matriz, com este método, teremos que primeiro definir o conceito de cofator.

**Definição 11.** Seja  $A = [a_{ij}]$  uma matriz de ordem  $n$ , denominamos cofator ou menor complementar do elemento  $a_{ij}$  o determinante de ordem  $n - 1$ , retirado de  $A$ , eliminando-se a linha e a coluna em que está situado o elemento  $a_{ij}$ .

**Definição 12.** Seja  $A = [a_{ij}]$  uma matriz de ordem  $n$ , chama-se de complemento algébrico de um elemento  $a_{ij}$ , o determinante obtido pelo produto  $(-1)^{i+j}D_{ij}$  onde  $D_{ij}$  é o menor complementar do elemento  $a_{ij}$ .

**Definição 13.** Denomina-se de matriz dos cofatores de  $A$ , e indicamos por  $A'$ , a matriz cujos elementos são os respectivos cofatores dos elementos da matriz  $A$ .

**Definição 14.** Denomina-se de matriz adjunta, a transposta da matriz dos cofatores de  $A$ , denotada por  $Adj[A]$ .

**Exemplo 15.** Seja  $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  o cofator do elemento 3 é 1, pois  $(-1)^{2+2} * (1) = 1$ . De fato, basta desconsiderar a linha 2 e a coluna 2 em que o elemento 3 se encontra e realizar o produto de  $(-1)^{2+2}$  pelo determinante da submatriz resultante.

Note que  $det[A] = -5$ , logo  $A$  é não singular. Além disso a matriz dos cofatores de  $A$  será:

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

E ainda tem-se que a matriz dos cofatores transposta é:

$$\text{adj}[A] = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim a inversa de  $A$  é dada por:

$$A^{-1} = \frac{-1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

De fato, se fizermos  $AA^{-1}$  teremos a matriz identidade.

### 3 Partição em blocos

Nesta seção iremos introduzir o conceito de partição de uma matriz em blocos. Para se compreender uma partição em blocos de uma matriz é necessário retomar o conceito de submatriz, o qual diz que dada uma matriz  $A = [a_{ij}] (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$  denomina-se submatriz de  $A$ , qualquer matriz formada pelos elementos pertencentes a um certo número de linhas e a outro certo número de coluna de  $A$ .

**Definição 16.** Diz-se que uma matriz  $A$  está particionada em blocos se as submatrizes que constituem cada bloco forem resultantes da divisão dessa matriz em linhas e colunas consecutivas. Essa divisão é feita por linhas horizontais e verticais, inseridas entre cada submatriz.

Assim, uma partição em blocos para uma matriz  $A$ ,  $4 \times 5$ , é dada abaixo,

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

Vale ressaltar, que na partição em blocos, não podemos reescrever a matriz original de uma forma qualquer, pois é necessário considerar todos os elementos das linhas e colunas que estão sendo separadas. Não podemos considerar como partição uma divisão de  $A$  da forma:

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array} \right]$$

Podemos concluir que se uma matriz  $A$  está particionada em blocos  $B_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq m$ ;  $1 \leq j \leq n$  os blocos  $B_{i1}, B_{i2}, \dots, B_{in}$  apresentam o mesmo número de linhas e as submatrizes  $B_{1j}, B_{2j}, \dots, B_{mj}$  apresentam o mesmo número de colunas. Deste modo, se  $A$  é  $m \times n$  e a submatriz  $B_{ij}$  possui ordem  $p_i \times q_i$ , então  $\sum_{i=1}^r p_i = m$  e  $\sum_{i=1}^s q_i = n$ , em que  $r$  e  $s$  são o número de blocos em cada coluna e cada linha, respectivamente.

As operações com matrizes na forma particionadas são definidas de maneira análoga às definidas para matrizes apresentadas a forma tradicional, por exemplo:

- Dada uma matriz,  $A$  para a qual se definiu uma partição, sua matriz transposta,  $A^\top$ , na forma particionada, terá como submatrizes as transpostas das submatrizes de  $A$ , por exemplo, se

$$A = \left[ \begin{array}{c|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} B_{11} & B_{12} \end{array} \right]$$

então

$$A^\top = \left[ \begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{21} & \\ \hline a_{12} & a_{22} & \\ a_{13} & a_{23} & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} B_{11}^\top \\ B_{12}^\top \end{array} \right]$$

- Se  $A = \left[ \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right]$ ,  $B = \left[ \begin{array}{cc} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{array} \right]$  e se  $a_{ij}$  e  $b_{ij}$  são de mesma ordem,  $\forall i, j$ , então

$$A + B = \left[ \begin{array}{cc} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{array} \right]$$

- Podemos também considerar o produto de duas matrizes particionadas em blocos. Por exemplo, se  $A = \left[ \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right]$  e  $B = \left[ \begin{array}{c} b_{11} \\ b_{21} \end{array} \right]$  então  $AB = \left[ \begin{array}{c} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \end{array} \right]$

Outras formas de partição podem ser consideradas desde que se tome o cuidado com as condições exigidas pelas operações, por exemplo, para somar matrizes particionadas em blocos é necessário que estas tenham o mesmo tamanho. Também podemos pensar no produto, nesse caso deve-se particionar as matrizes de forma conveniente à existência dos produtos que se fizerem necessários.

Ainda em analogia aos conceitos usuais também pode-se definir matriz bloco triangular (superior e inferior) e matriz bloco diagonal. Uma matriz na forma particionada (quadrada na forma particionada) é dita bloco triangular superior (inferior) se, e somente se, os blocos  $B_{ij}$  com  $i < j$  ( $i > j$ ) são iguais a matriz nula. E, é dita bloco diagonal se, e somente se, os blocos  $B_{ij}$  com  $i \neq j$  são iguais a matriz nula.

Assim, as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  do exemplo que segue são, respectivamente, matriz bloco triangular superior, bloco triangular inferior e bloco diagonal.

$$A = \left[ \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{array} \right], B = \left[ \begin{array}{cc} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{array} \right], C = \left[ \begin{array}{cc} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{array} \right]$$

Propriedades tais como as descritas abaixo continuam valendo quando trabalhamos com matrizes particionadas em blocos.

- Uma matriz triangular é inversível se e somente se não apresentar elemento nulo na sua diagonal principal;
- O determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal.

## 4 Inversa de matriz particionada em blocos

Objetiva-se nesta seção encontrar a inversa de uma matriz não singular utilizando uma partição em blocos conveniente.

Podemos reduzir o problema de encontrar a inversa de uma matriz não singular qualquer ao problema de encontrar a inversa de uma matriz não singular e simétrica, pois o problema da determinação da inversa de uma matriz qualquer pode ser reduzido à obtenção da inversa da matriz  $A^T A$ , a qual é sempre simétrica. Vejamos: Se  $A$  é não singular,  $A^T A$  também o será e  $A^{-1} = (A^T A)^{-1} A^T$ .

**Teorema 17.** *Teorema Seja  $A = [a_{ij}]$ ,  $n \times n$ , simétrica, não singular e particionada da maneira que segue,*

$$A = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right],$$

com  $A_{11}$  não singular. Então,

$$A^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11}^{-1} + BC^{-1}B^T & -BC^{-1} \\ \hline (-BC^{-1})^T & C^{-1} \end{array} \right],$$

em que  $B = A_{11}^{-1}A_{12}$  e  $C = A_{22} - A_{21}B$ .

*Prova.* O Problema pode ser considerado a partir da do sistema de equações lineares,  $n \times n$ ,  $S : AX = Y$ , em que  $X$  é o vetor,  $n \times 1$  das incógnitas do sistema. Como  $A$  é não singular, ou seja, inversível, temos que  $X = A^{-1}Y$ .

Consideremos a partição abaixo para o sistema  $AX = Y$ . Com  $A_{11}$  não singular.

$$\left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} Y_1 \\ Y_2 \end{array} \right],$$

em que  $A_{11}$  é uma matriz de ordem  $k$  e  $X_1$  e  $Y_1$  são vetores  $k \times 1$ . Consequentemente  $A_{12}$  é  $k \times (n - k)$ ;  $A_{21}$ ,  $(n - k) \times k$ , é  $A_{12}^T$ , uma vez que  $A$  é simétrica;  $A_{22}$  é de ordem  $(n - k)$  e  $X_2$  e  $Y_2$  são vetores  $(n - k) \times 1$ .

Que é equivalente ao seguinte sistema de equações,

$$S : \begin{cases} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 = Y_1 \\ A_{21}X_1 + A_{22}X_2 = Y_2 \end{cases}$$

Da equação  $A_{11}X_1 + A_{12}X_2 = Y_1$  temos que,  $X_1 = A_{11}^{-1}Y_1 - A_{11}^{-1}A_{12}X_2$

Substituindo  $X_1$  na equação  $A_{21}X_1 + A_{22}X_2 = Y_2$  temos,  $(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})X_2 = Y_2 - A_{21}A_{11}^{-1}Y_1$ .

Tomando  $B = A_{11}^{-1}A_{12}$  e  $C = A_{22} - A_{21}B$ , temos, se  $C$  for inversível,  $X_2 = (-BC^{-1})^T Y_1 + C^{-1}Y_2$ . De onde segue que  $X_1 = (A_{11}^{-1} + BC^{-1}B^T)Y_1 + (-BC^{-1})Y_2$ .

Assim podemos escrever,

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11}^{-1} + BC^{-1}B^t & -BC^{-1} \\ \hline (-BC^{-1})^t & C^{-1} \end{array} \right] \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$$

E, portanto,

$$A^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11}^{-1} + BC^{-1}B^\top & -BC^{-1} \\ \hline (-BC^{-1})^\top & C^{-1} \end{array} \right].$$

□

Este Teorema pode ser visto como um algoritmo para se encontrar a inversa de uma matriz:

- Dada a matriz  $A = [a_{ij}]$ ,  $n \times n$ , se possível, considerar a seguinte partição, desde que  $A_{11}$  seja não singular:

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1(k+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} & a_{2(k+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{k(k+1)} & \dots & a_{kn} \\ \hline a_{(k+1)1} & \dots & a_{(k+1)k} & a_{(k+1)(k+1)} & \dots & a_{(k+1)n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & a_{n(k+1)} & \dots & a_{nn} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

- Determinar  $A_{11}^{-1}$ ;
- Considerar  $A_{11}^{-1}$  e  $A_{12}$  para obter  $B = A_{11}^{-1}A_{12}$ ;
- Utilizando  $A_{22}$ ,  $A_{21}$  e  $B$  obter  $C = A_{22} - A_{21}B$ ;
- Determinar, se possível,  $C^{-1}$ ,  $-BC^{-1}$  e  $BC^{-1}B^\top$ ;
- Finalmente, obter  $A_{11}^{-1} + BC^{-1}B^\top$ .

Deve-se ressaltar alguns aspectos a respeito deste procedimento,

- A necessidade de ter como hipóteses a inversibilidade do  $A_{11}$  e de  $C$ ;
- Muitas vezes é conveniente estabelecer  $k = n - 1$ , pois assim  $C = A_{22}$  se reduz a um escalar, e se esse escalar for diferente de zero é inversível.
- Quando a matriz  $A$  for bloco diagonal temos que  $B = 0$  e  $C = A_{22}$  e neste caso temos

$$A^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11}^{-1} & 0 \\ \hline 0 & A_{22}^{-1} \end{array} \right]$$

**Exemplo 18.** Seja  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , encontre  $A^{-1}$  por meio de uma partição em blocos.

**Resolução**

Este problema permite tomar-mos alguns caminhos diferentes para sua resolução. Assim duas formas de resolução serão expostas a seguir.

A primeira refere-se a tomar uma partição conveniente, mencionada na exposição do algoritmo, visto que esta facilita processos computacionais, pois torna  $A_{22}$  um escalar. Assim temos:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}; A_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; A_{21} = [ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 ]; A_{22} = [ 1 ]$$

Então seguindo o raciocínio do algoritmo, temos que calcular  $A_{11}^{-1}$ , mas por ser uma matriz de ordem  $4 \times 4$  devemos particiona-la novamente de forma conviniente, afim obter sua inversa tal como segue:

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; B_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}; B_{21} = [ 1 \quad 2 \quad 0 ]; B_{22} = [ 1 ]$$

Como  $B_{11}$  é a matriz identidade  $I_{3 \times 3}$ , temos que sua inversa é  $B_{11}^{-1} = B_{11}$ . Assim resta calcular  $D$  e  $E$ . Segundo o algoritmo  $D$  é dado como  $D = B_{11}^{-1}B_{12}$ , visto que  $B_{11}^{-1}$  é a matriz identidade temos que  $D = B_{12}$ .

Além disso,  $E = B_{22} - B_{21}B$ , logo

$$E = [ 1 ] - \left( [ 1 \quad 2 \quad 0 ] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = [ 1 ] - [ 5 ] = [ -4 ]$$

Portanto  $E = [ -4 ]$  e  $E^{-1} = \frac{-1}{4}$ . Assim obtemos que

$$-DE^{-1} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \left[ \frac{-1}{4} \right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-DE^{-1}D^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} [ 1 \quad 2 \quad 0 ] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por fim, tem-se:

$$B_{11}^{-1} + DE^{-1}D^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \left( - \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim

$$A_{11}^{-1} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} A_{11}^{-1} + DE^{-1}D^T & & & -DE^{-1} & & \\ \hline & & & & E^{-1} & \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{4} \end{bmatrix}$$

Logo resta determinar  $B$  e  $C$  para encontrar  $A^{-1}$ . Pelo algoritmo, temos que  $B = A_{11}^{-1}A_{12}$  então:

$$B = A_{11}^{-1}A_{12} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

e  $C = A_{22} - A_{21}B$ , como  $B = A_{12}$  e  $A_{22} = 1$  temos que:

$$C = [1] - \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = [1] - [3] = [-2]$$

Assim resta determinar  $C^{-1}$ ,  $-BC^{-1}$ ,  $BC^{-1}B^T$  e  $A_{11}^{-1} + BC^{-1}B^T$  para se ter  $A^{-1}$ . Note que  $C$  é inversível, pois  $\det[C] \neq 0$ , e a inversa de  $C$  é  $C^{-1} = \frac{-1}{2}$ , visto que  $CC^{-1} = I$ . Ainda,

$$-BC^{-1} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left[ \frac{-1}{2} \right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(-BC^{-1})^T = \left[ \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 0 \right]$$

Portanto a matriz inversa de  $A$  é

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -4 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Outra maneira de solucionar o problemema, refere-se a tomar uma partição, tal como se segue:

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Como  $A_{11}$  é uma matriz identidade sua inversa é a própria matriz identidade. Logo para obter a inversa de  $A$  resta encontrar  $B$  e  $C$ , para então determinar as relações expostas na primeira resolução, ou seja, obter se possível  $C^{-1}$ ,  $-BC^{-1}$ ,  $-BC^{-1}B^T$  e  $A_{11}^{-1} + BC^{-1}B^T$ .

Temos que  $B$  e  $C$  são:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

No que te  $C$  é inversível, pois  $\det[C] = -1 \neq 0$ , portanto:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Assim, podemos obter as relações restantes, tal como segue:

$$-BC^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}; -BC^{-1}B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}; A_{11}^{-1} + BC^{-1}B^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Portanto a inversa de  $A$  é

$$A^{-1} = \left[ \begin{array}{ccc|cc} A_{11}^{-1} + BC^{-1}B^T & -BC^{-1} \\ \hline (-BC^{-1})^T & C^{-1} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -4 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 19.** Seja a matriz  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  encontre  $A^{-1}$  a partir de uma

partição em blocos.

### Resolução

Note que, é conveniente tomar uma partição tal que se obtenha uma matriz de bloco diagonal. Assim temos  $A_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $A_{12} = A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  e  $A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ .

Seguindo o raciocínio do algoritmo amostrado neste trabalho, temos que:  $B = A_{11}^{-1}A_{12}$  e, como  $A_{12} = 0$  então  $B = 0$  portanto, o termo  $A_{12}$  da matriz  $A^{-1}$  será nulo. Analogamente como o termo  $A_{21}$  da matriz inversa é escrito como  $(-B.C^{-1})^T$  e  $B = 0$  temos que  $A_{21} = 0$ .

Logo para encontrar a inversa de uma matriz de bloco diagonal, basta calcular a inversa da matriz  $A_{11}$  e a inversa de  $C$ , o qual será escrito como  $C = A_{22}$  visto que  $B = 0$ .

Então, temos que calcular a inversa de  $A_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Pelo método das operações elementares temos que:  $A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Analogamente calculando-se a inversa da matriz  $C = A_{22}$  tem-se:  $A_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Portanto, a inversa da matriz  $A$  é  $A^{-1} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$

Note que,  $A_{11}$  é a inversa de  $A_{22}$  e vice versa, visto que  $A_{11}A_{22} = A_{22}A_{11} = I$

## 5 Conclusão

O trabalho apresenta um conceito geralmente não explorado numa primeira abordagem de Álgebra Linear, seja em curso de graduação em matemática ou engenharias: partição de uma matriz em blocos. Cabe ressaltar que em muitas situações práticas é necessário realizar operações matriciais com matrizes de ordem elevada. No entanto em diversos casos a maioria dos valores numéricos são iguais a um ou zero, formando assim submatrizes que correspondem a matriz identidade ou a matriz nula. Assim utilizar partição em blocos para encontrar a inversa simplifica bastante os cálculos.

## Referências Bibliográficas

- Dorf, R. C. **Matrix Algebra John Wiley - Sons**, 1968.
- Hohn, Franz E. **Elementary Matrix Algebra - Collier-Macmillan**, 1973.
- Iezzi, G. **Fundamentos da Matemática Elementar**, vol. 4. Atual editora, 1977.
- Lancaster, P. e Tismenetsky, M. **The Theory of Matrices with Applications**, academic press, 1985.
- Searle, S. R. **Matrix Algebra Useful for Statistics John Wiley - Sons**, 1982.
- Neto, José de Almendra F.; VIEIRA, Inaldo Ayres. **Análise matricial de estruturas.**, 3º ed. Curitiba, 1979.

# Algoritmos direcionados a jogos digitais: elementos da game engine Unity

Guilherme Vieira Bochi  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
guilhermebochi@gmail.com

Flavio Roberto Dias da Silva  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
frdsilva@yahoo.com.br

**Resumo:** O presente artigo apresenta as características básicas da game engine Unity 3D.

**Palavras-chave:** Unity 3D; Jogos Digitais.

## 1 Introdução

Neste artigo serão introduzidos os conceitos da programação na Unity 3D, sua utilização e as suas principais funções e características de layout. A Unity possui um layout simples e suporte a várias linguagens de programação, além de possuir características específicas de programação, o que facilita toda a implementação e organização de scripts. Nesta linha de desenvolvimento, um outro conceito importante que será introduzido é a de programação orientada a objetos (POO).

Em relação a linguagem de programação, a Unity 3D disponibiliza algumas opções, entre elas, o UnityScript que é uma linguagem derivada do JavaScript e o C# do Microsoft. No desenvolvimento do nosso trabalho utilizamos a linguagem C# que possui características sólidas de orientação a objetos e melhoram a estruturação do código. Nessa linha, o conceito de algoritmo e POO foram estudados seguindo Deitel e Deitel (2003), Stellman e Greene (2008) e Microsoft (2017) para utilizar os recursos da Unity.

## 2 Unity 3D

Unity 3D é um software de criação de jogos ou como é conhecido, motor de jogos. Nele existem várias ferramentas específicas, que vão desde a utilização de arte para a criação de cenários, até a construção das estruturas e rotinas para o armazenamento de dados, como citado nos documentos da Unity (2017).

A arquitetura da construção e programação do jogo é organizado da seguinte maneira:  
Cena → Game Object → Componentes.

Uma cena é uma simulação computacional de um espaço 3D onde é montado o jogo digital. Dentro de uma cena, os objetos distribuídos, tais como, modelos 3D, luzes, câmeras, objetos vazios, estes são denominados Game Objects.

Nos Game Objects são anexados componentes, os quais são conjuntos de algoritmos responsáveis por todas as interações dentro do jogo. São exemplos de componentes:

- **Transform:** Todo Game Object tem um transform e este é responsável pela posição, rotação e escala do objeto.
- **Collider:** O colisor, como o próprio nome diz, é responsável pelas colisões dentro da cena de jogo.
- **RigidBody:** Componente responsável por simular a física dentro dos jogos.
- **Scripts:** Nossos scripts são conectados aos objetos de jogo como componentes.

## 2.1 Interface

A Unity apresenta uma interface simples e dinâmica. Abaixo são listadas algumas opções da interface:

- **Hierarchy:** lista todos os Game Objects presentes na cena atual;
- **Scene:** nessa aba temos uma representação visual da cena atual, possibilitando fazer edições nos Game Objects;
- **Game:** essa aba mostra uma visão da câmera do jogo, essa é a visão que o jogador terá quando iniciar o jogo;
- **Project:** essa aba mostra uma pasta no computador onde são guardados todos os elementos adicionais do jogo;
- **Inspector:** lista os componentes do Game Object selecionado. Podemos aqui editar alguns campos específicos dos componentes;
- **Toolbar:** a barra de ferramentas é composta por controles básicos. Cada um relacionado com diferentes partes do editor. À esquerda possui ferramentas básicas para manipular a vista de cena e objetos dentro da cena. No centro estão os controles de *play*, *pause* e *passo*. Os botões do lado direito, darão acesso a *Unity Cloud* e sua conta da Unity, seguido de um menu de visibilidade da camada e, finalmente menu de layout da Unity. A barra de ferramentas não é dinâmica e é a única parte da interface da Unity que não pode ser reorganizado;

## 3 UI

O sistema UI permite criar interfaces de usuário rápida e intuitiva.

### 3.1 CANVAS

O canvas é a área onde todos os elementos de interface são filiados, ele também é um game engine e tem em anexo um componente que também se chama canvas Hierarchy. O primeiro filho é desenhado primeiro, o segundo filho a seguir, e assim por diante. Se dois elementos UI se sobrepuserem, o último aparecerá em cima do anterior.

Para alterar qual elemento aparece em cima de outros elementos, simplesmente reordene os elementos na hierarquia arrastando-os. A ordem também pode ser controlada a partir de scripts usando estes métodos no Transform.

### 3.2 LAYOUT

Ferramenta utilizada para posicionamento de elementos de interface do usuário. Abaixo serão listados alguns itens que compõem o Layout:

- **FERRAMENTA RECT:** Essa ferramenta se dá por meio de um retângulo que pode ser manipulado na Scene View usando uma ferramenta Rect na barra de ferramentas.
- **RECT TRANSFORM:** É uma transformação do componente que é utilizado para todos os elementos de interface em vez de regular o componente Transform do elemento. O Rect Transform tem posição, rotação e escala, mas também tem uma largura e altura utilizada para especificar as dimensões do retângulo.
- **PIVÔ:** Rotações, tamanho, e modificação de escala ocorrem em torno do pivô de modo que a posição do pivô afeta o resultado de uma rotação, redimensionamento ou dimensionamento. Quando o botão da barra de ferramentas Pivot está configurado para o modo Pivot, o pivô de um Rect Transform pode ser movido na Scene View.
- **ÂNCORAS:** O Rect Transform inclui um conceito de layout chamado âncoras. Âncoras são mostrados como quatro pequenas alças triangulares na Scene View e as informações da âncoras também são mostradas no Inspector.

### 3.3 COMPONENTES VISUAIS

Com a introdução do sistema de interface do usuário, novos componentes foram adicionados que o ajudam a criar funcionalidades específicas de GUI. Esta seção abordará os conceitos básicos dos novos Componentes que podem ser criados.

- **IMAGE:** Uma imagem tem um componente Rect Transform e um componente Image. Um sprite pode ser aplicado ao componente Image sob o campo Target Graphic e sua cor pode ser definida no campo Color. Um material também pode ser aplicado ao componente Image.

- **RAW IMAGE:** O componente Image toma um sprite, mas Raw Image tem uma textura (sem bordas etc). Raw Image só deve ser usado caso seja necessário. Caso contrário, a imagem será adequada na maioria dos casos.
- **MASK:** Uma máscara não é um controle de interface visível, mas sim uma maneira de modificar a aparência dos elementos filho de um controle. A máscara restringe (ou seja, "máscara") os elementos filho à forma do pai. Assim, se o filho é maior do que o pai, então apenas a parte do filho que se encaixa dentro do pai será visível.

### 3.4 Animação

A animação permite que cada transição entre estados de controle seja totalmente animada usando o sistema de animação da Unity. Este é o mais importantes dos modos de transição devido ao número de propriedades que podem ser animadas simultaneamente.

- **FLUXO DE TRABALHO:** O sistema de animação da Unity baseia-se no conceito de Clips de Animação, que contêm informações sobre como certos objetos devem mudar sua posição, rotação ou outras propriedades ao longo do tempo. Cada clip pode ser pensado como uma única gravação linear.

Os Clips de Animação são organizados em um sistema de fluxograma estruturado chamado Animator Controller . O controlador do animador funciona como uma "Máquina de Estado", que mantém o rastreamento do clipe que deve estar a ser reproduzido atualmente e quando as animações devem mudar ou misturar-se.

Um controlador de animador muito simples pode conter apenas um ou dois clipes, por exemplo, para controlar um spin-up e salto de energia, ou para animar uma porta abrindo e fechando na hora correta. Um controlador animador mais avançado pode conter dezenas de animações humanas para todas as ações do personagem principal e pode se misturar entre vários clipes ao mesmo tempo para fornecer um movimento fluido à medida que o jogador se move em torno da cena.

- **CONTROLE DE ANIMAÇÃO :** Quando você tem clipes de animação prontos para usar, você precisará usar um controlador de animador para reuni-los. Um asset Animator Controller é criado dentro Unity e permite que você mantenha um conjunto de animações para um personagem ou objeto.

Na maioria das situações, é normal ter várias animações e alternar entre elas quando determinadas condições de jogo ocorrerem. Por exemplo, você pode mudar de uma animação de caminhada para um salto sempre que a barra de espaço é pressionada. No entanto, mesmo que você tenha apenas um único clipe de animação, você ainda precisa colocá-lo em um controlador de animação para usá-lo em um objeto de jogo.

O controlador gerencia os vários estados de animação e as transições entre eles usando uma chamada máquina de estado, que poderia ser pensada como uma espécie de fluxograma ou um programa simples escrito em uma linguagem de programação visual dentro da Unity.

- **JANELA DE ANIMATOR** : A seção principal com a grade cinza escuro é a área de layout. Você pode usar esta área para criar, organizar e conectar estados em seu controlador de animação. Você pode clicar com o botão direito do mouse na grade para criar novos nós de estado. Use o botão do meio do mouse ou Alt / Opção para arrastar a vista ao redor. Clique para selecionar os nós de estado para editá-los e clique e arraste os nós de estado para reorganizar o layout da máquina de estado.

O painel esquerdo pode ser alternado entre a visualização Parâmetros e a vista Camadas. A exibição de parâmetros permite que você crie, visualize e edite os parâmetros do controlador do animador. Estas são variáveis que você define que atuam como entradas na máquina de estado. Para adicionar um parâmetro, clique no ícone Plus e selecione o tipo de parâmetro no menu pop-up. Para apagar um parâmetro, selecione o parâmetro nas listas e pressione a tecla apagar.

## 4 Conclusão

Nesse artigo vimos várias das principais características da Unity. Listamos alguns dos seus principais recursos dando atenção especial ao UI, interface do usuário e animações. Ao fim, concluímos que a Unity oferece uma game engine de extrema qualidade que pode fazer jogos e aplicativos para as principais plataformas do mercado. Possibilitando a quase qualquer pessoa fazer jogos eletrônicos com suas próprias ideias.

## Referências

- DEITEL, H. M.; DEITEL, P. J.. Java: Como Programar. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2003. Traduzido por Carlos Arthur Lang Lisboa.
- MICROSOFT. Linguagem C#. 2017. Disponível em: <https://msdn.microsoft.com/pt-br/library/kx37x362.aspx>. Acesso em: 13 out. 2016.
- STELLMAN, Andrew; GREENE, Jennifer. Use a Cabeça!: C#. Rio de Janeiro: Alta Books, 2008. Traduzido por Eveline Machado.
- UNITY (Estados Unidos). Unity 3D User Manual. 2017. Disponível em: <http://docs.unity3d.com/Manual/index.html>. Acesso em: 13 out. 2016.
- UNITY (Estados Unidos). Unity 3D Community Forum. 2017. Disponível em: <http://forum.unity3d.com/>. Acesso em: 13 out. 2016.
- UNITY (Estados Unidos). Unity 3D Online Tutorials. 2017. Disponível em: <https://unity3d.com/pt/learn/tutorials>. Acesso em: 13 out. 2016.



## Transposição didática e o uso do livro didático

Thalia Falquievicz Corassa  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste  
thaliacorassa@hotmail.com

Bruno Gonçalves  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste  
brunomiguel281@gmail.com

**Resumo:** Este artigo apresenta um estudo acerca da transposição didática no âmbito escolar. Trata-se de uma revisão bibliográfica, que utiliza como referencial teórico o conceito de transposição didática de Yves Chevallard. Apresenta-se também uma reflexão sobre o uso do livro didático, considerando que esse material deve ser apenas um apoio pedagógico e não o único material didático a ser utilizado nas salas de aula.

**Palavras-chave:** Transposição Didática; Conceito; Livro Didático.

### 1 Introdução

O processo de transformação de um saber científico em um saber ensinado é complexo e pode envolver diversos sujeitos, os quais podem vir a produzir objetos de ensino, como é o caso do livro didático. Yves Chevallard (1991) nomeia este processo de *Transposição Didática*. Este autor ressalta que o saber que chega até a sala de aula não é explorado como foi produzido e estudado em um contexto puramente científico. Esse saber passa por processos de transformações que implicam uma mudança significativa para que o saber possa ser ensinado de acordo com o conhecimento leigo do alunado, chamada pelo autor de “roupagem didática”. Entende-se que essa “roupagem didática” é necessária pelo fato de que a comunidade escolar tem objetivos diferentes da científica.

O papel da ciência é responder às questões que o contexto histórico social faz transformando em novos conhecimentos e saberes. Alguns desses saberes são repassados nas escolas por meio de ensinamentos que são socializados nas instituições de ensino. Neste momento a transposição didática cumpre seu papel, o qual visa uma nova forma de explicar os conteúdos escolares com base na ciência, de forma que esses novos saberes atendam a compreensão ainda inocente dos alunos e permitam o seguimento de etapas totalmente distintas.

Podemos perceber que uma das ferramentas básicas e muito utilizada nas Instituições de Ensino é o livro didático. Este é um instrumento que pode auxiliar o professor a transpor os conhecimentos mais importantes criando uma ponte de transposição para que o conteúdo científico se torne mais compreensível para os alunos.

A pesquisa será bibliográfica tendo como principal referencial teórico Yves Chevallard (1991) e seu trabalho sobre a Transposição Didática, mais especificamente sobre a Didática da Matemática sob a influência da didática francesa.

## 2 Sobre a Transposição Didática

Chevallard (1991) ressalta a transposição didática em um campo muito amplo. Ele apresenta a Didática da Matemática como tema central de seus estudos, afirmando que esta seja uma ciência, e que:

Um conteúdo de conhecimento que foi designado como saber a ensinar sofre desde então um conjunto de transformações adaptativas que o tornam adequado para ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O “trabalho” que transforma de um objeto de conhecimento para ensinar em um objeto de ensino é chamado de transposição didática. (CHEVALLARD, 1998, p.45).

Para Chevallard (1991) a transposição didática realiza-se por meio da “invisibilidade”, ou mesmo, por uma “esfera pensante” a qual ele próprio deu o nome de Noosfera. Podemos ainda compreender segundo este autor que a Noosfera pode ser vista como uma instituição formada por pesquisadores, docentes, especialistas e técnicos, ou de outra forma, membros de estudos que sejam ligados e que interajam com outras instituições pelo mesmo objetivo, entre eles, definir quais os saberes que deverão ser ensinados em sala de aula.

Segundo Pais (2011),

O resultado da influência da noosfera condiciona o funcionamento de todo o sistema didático. O trabalho seletivo resulta não só na escolha de conteúdos, como também na definição de valores, objetivos e métodos, que conduzem o sistema de ensino. (PAIS, 2011, p. 19).

Chevallard (1991) coloca o professor como um transformador do saber científico por meio do trabalho interno da transposição. Nesse processo, o docente assume o papel de negociar com os alunos a forma de transmitir os conteúdos curriculares científicos em conteúdos em que os alunos tenham acesso, podendo ser compreendido, ensinado e aprendido.

Segundo Menezes (2006),

O professor veste uma nova roupa no saber, criando um texto didático o qual estará impregnado pela relação do saber transformado e preparado para ser explanado aos alunos e pela subjetividade que o saber científico por sua vez trás pelo fato de ser observado e pesquisado ao longo do tempo. (MENEZES, 2006, p. 85).

Portanto, tal análise nos faz compreender que o docente como sujeito da pesquisa, adquire a função de transformador do conhecimento científico para o saber escolar repassado para os alunos (CHEVELLARD, 1991).

Outra questão que Chevallard (1991) ressalta é a forma com que os professores usam certos termos para fazer a transposição didática, o que em alguns casos acaba por descaracterizar os conceitos, confundindo os alunos. Um exemplo disso seria o conceito de reta e segmento de reta, no qual ao explanar esse conteúdo o professor refere-se a “reta” e ilustra no quadro “segmento de reta”, de modo que pode confundir os alunos, pois reta é infinita e segmento de reta é parte de uma reta, determinado por um ponto inicial e um ponto final. Desta forma, podemos perceber que o professor, ao fazer a transposição, descaracteriza os conceitos. Por isso

que o pesquisador francês enfatiza que o professor deve usar o termo “vigilância epistemológica”, para que não aconteça uma distorção dos verdadeiros significados das palavras, provocando uma deformação no conteúdo na tentativa de traspor didaticamente aos alunos.

### 3 O trabalho com o Livro Didático

O trabalho com o livro didático nos dias de hoje vem sendo um tanto que debatido em todas as escolas em nosso país, assunto que causa polêmica entre os docentes, pois ao mesmo tempo em que encontramos livros de qualidade, temos ainda livros com defasagem no conteúdo, que geram consequências no momento em que é feita a transposição didática.

Segundo Bastos (2004),

Por entendermos que o livro didático deve ser visto como um instrumento auxiliar do processo ensino-aprendizagem e não como fim do processo, se faz necessário que seja um texto que, além de respeitar o desenvolvimento cognitivo do aluno, não apresente conceitos errados e não reduza a matemática a um conjunto de regras e definições sem ligação lógica entre si. (BASTOS, 2004, p. 01).

Os livros didáticos, os quais foram chamados de manuais didáticos por muito tempo, transcrevem fatos históricos culturais, políticos, econômicos e sociais que são vivenciados em determinado momento histórico da humanidade. Essa forte influência faz com que as obras sofram constantes mudanças por parte das concepções educacionais.

É notório que o livro didático é de suma importância na prática pedagógica do educador, porém o mesmo deve ser apenas um apoio pedagógico e não o único material didático a ser utilizado. É com base nessa dependência dos educadores com relação aos livros didáticos que se deve visar uma formação para os mesmos com o intuito de proporcionar autonomia para planejar suas aulas, sem a necessidade de estarem vinculados totalmente com o livro didático. Dessa forma, a contribuição será ainda maior para que a qualidade da aprendizagem seja garantida, assegurando a formação dos educandos como seres pensantes e autônomos.

Sabe-se que na disciplina de Matemática, o livro didático é o principal instrumento de apoio para o embasamento teórico em sala de aula. Essa prática não é de hoje e vem sendo culturalmente repassada ao longo dos anos na história da educação brasileira. É comum vermos alunos transcreverem páginas e mais páginas de livros matemáticos tidos como único e verdadeiro ao realizarem atividades teórico-práticas.

Lima (2001) aponta que o livro didático é uma rica fonte de referência com que o professor de Matemática conta para organizar suas aulas, e até mesmo para firmar seus conhecimentos. Porém, revela que a análise de livros didáticos de Matemática deve ser adequada a três componentes básicos: a Conceituação: que compreende a formulação de definições, o enunciado de proposições, o estabelecimento de conexões entre os diversos conceitos, bem como a interpretação e reformulação dos mesmos sob diferentes aspectos; a Manipulação: que é de caráter algébrico que diz respeito à habilidade no manuseio de equações, fórmulas, operações e construções geométricas elementares; e a Aplicação: que é o emprego de noções e teorias da

Matemática em situações que vão de problemas triviais a questões mais sutis provenientes de outras áreas, sejam elas científicas ou tecnológicas.

De acordo com o autor percebemos que ao utilizar o livro didático, seja de Matemática ou de qualquer área, o professor deve fazer uma análise referente ao mesmo e os conteúdos que estão sendo abordados, para assim preparar sua aula de forma a conseguir fazer a transposição didática, explanando o conteúdo da maneira mais compreensível para seu alunado.

## 4 Considerações finais

Este estudo nos permitiu compreender que o conhecimento transmitido em sala de aula não é o mesmo que é produzido e adquirido por meio da ciência, mas que essa última colabora diretamente para que o primeiro possa de fato acontecer. Porém, é só após um longo processo de transformação, deformação e, conseqüentemente, uma nova formação, que o conhecimento é moldado para ser repassado aos educandos.

Sendo assim, a vigilância epistemológica deve ser constante, com o intuito de garantir as adaptações necessárias para o enfrentamento dos obstáculos que os professores encontram perante o processo de ensino-aprendizagem.

Em sala de aula, durante a explanação dos conteúdos, os professores devem analisar o que os livros didáticos trazem de forma a transformar o saber científico em um saber escolar, de acordo com a realidade dos alunos.

Portanto, nesse processo de adequações dos conteúdos, os docentes irão planejando também a forma mais adequada de repassar tais conteúdos, sem perder a essência de suas funções, o conhecimento.

No que diz respeito ao uso do livro didático, concluímos que é responsabilidade do professor decidir o uso que fará do livro didático e se confiará cegamente na transposição didática do autor. Acreditamos que o mais recomendável seria que o professor avaliasse o processo de transposição didática escolhido pelo autor e adequasse-o à sua própria transposição, a qual deve incluir a transformação e adequação dos conteúdos respeitando a realidade de seus alunos.

Durante esse trabalho, pudemos perceber o quanto o assunto é abrangente, e que a transposição didática deve ser fonte de pesquisas futuras.

## Referências

- BASTOS, M. S. **O Livro Didático nas aulas de Matemática:** um estudo a partir das concepções dos professores. Recife: UFPE - ENEM, 2004.
- MENEZES, A. P. A. B. **Contrato Didático e Transposição Didática:** Inter-Relações entre os Fenômenos Didáticos na Iniciação á Álgebra na 6º Série do Ensino Fundamental. Tese de Doutorado, UFPE, 2006.

- CHEVALLARD, Y. **La Transposition Didactique:** Du Savoir Savant au Savoir Enseigné. Grenoble, La pensée e Sauvage, 1991.
- CHEVALLARD, Y. **La Transposición Didáctica:** Del Saber Sabioal Saber Enseñado. Argentina. 3. ed, Aique (Psicología cognitiva y educación), p. 45-66, 1998.
- LIMA, E. L. Exame de textos: **Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio.** Rio de Janeiro: IMPA/ SBM, 2001.
- PAIS, L. C. **Didática da Matemática:** uma análise da influência francesa. 3. ed. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2011.



## A Influência da concepção de Matemática do professor na sua forma de ensinar

Laís Dri da Rosa  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Cascavel  
laisdridarosa@hotmail.com

Leonardo Salvador  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Cascavel  
leonardosalvador1903@gmail.com

**Resumo:** Esse artigo tem como objetivo discutir as relações entre as concepções filosóficas da Matemática e o ensino de Matemática e a identificação de tendências para auxiliar no processo de ensino e de aprendizado e nas práticas do professor nestes processos. O artigo também aborda a presença e implicações dessas concepções na formação do professor de Matemática. Percebe-se que há diferentes modos de conceber a Matemática, modelos que se desenvolveram ao longo da História mas que carregam traços de sistemas filosóficos existentes na Antiguidade. Tais modelos ainda influenciam o trabalho e o ensino da Matemática de hoje.

**Palavras-chave:** Ensino de Matemática; Formação do professor de Matemática; Concepção de Matemática.

### 1 Introdução

Neste artigo abordamos a importância da clareza na concepção filosófica do saber matemático para a formação do professor de Matemática e para a sua prática pedagógica.

A fim de estabelecer uma relação fundamentada entre a concepção de Matemática do professor e a sua forma de ensino, quais influências esta recebe daquela, buscaremos definir alguns conceitos que fornecerão subsídios para ampliar a compreensão.

Primeiramente, discorreremos sobre a Matemática e sobre o trabalho desenvolvido pelo matemático. Posteriormente, tecemos considerações sobre o professor e suas maneiras de ensinar Matemática.

### 2 Sobre a Matemática

As concepções matemáticas que tem relação com as correntes filosóficas, como destacou Davis e Hersh (1985), podem ser caracterizadas em três tendências filosóficas: Platonismo, Formalismo e Construtivismo. A Matemática pode ser vista como a ciência que lida com sentenças que possuem o formato de hipótese - dedução - conclusão.

Estas tendências embasaram três grandes escolas filosóficas: a escola Logicista, a Formalista e a Intuicionista, analisando os principais pontos e as principais características de cada uma dessas concepções.

A partir do estudo das três tendências fundamentais na concepção histórica, Platonismo, Formalismo e Construtivismo, das três escolas filosóficas, a Logicista, a Formalista e a Intuicionista, surgem algumas categorias que subdividem as tendências filosóficas matemáticas, que são: A tendência Formalista Clássica, Empírico Ativista, Formalista Moderna, e a Tecnicista.

Davis e Hersh (1985) apontam como tendências que fundamentam concepções históricas o Platonismo, Formalismo e Construtivismo. De acordo com a concepção histórica platônica, os objetos matemáticos são ideias puras e acabadas e a existência é radicalmente objetiva e independente do conhecimento sobre eles. Na concepção Formalista se vê possibilidade de organizar toda a Matemática Clássica em um sistema formal consistente e completo, utilizando axiomas, definições, teoremas e demonstrações. Nesta concepção Formalista, a ideia era a formalização de todos os objetos matemáticos. De acordo com a visão Construtivista não se deve repassar informações para serem memorizadas, o construtivismo defende que é necessário que as ideias sejam consolidadas a partir da descoberta, das próprias pesquisas dos sujeitos com o meio, aumentando a capacidade de pensar e analisar informações. De acordo com a visão construtivista da Matemática, as ideias devem ser concebidas por meio de estímulos e esse instinto de busca deve ser algo natural e automático.

Muitos estudiosos consideram que essas tendências são extremos opostos que apresentam concepções que sozinhas não funcionariam muito bem, logo precisa-se encontrar o equilíbrio entre todas elas para que de forma harmônica, realmente funcione a aplicação prática de algo que na teoria aparenta ser muito funcional.

Temos ainda um fato importante que pode interferir nas práticas pedagógicas do professor, que é a subjetividade, esta, está sempre impregnada na forma de pensar e, conseqüentemente, se manifesta em suas práticas. Vamos ressaltar ainda as diferenças entre o professor de matemática e o matemático, pois há uma grande diferença entre esses “personagens”, a qual, geralmente, é desprezada.

Outro aspecto a ser considerado é o conceito de epistemologia do professor. Como são estruturados os conceitos de determinada disciplina e quais as influências epistemológicas do próprio professor, sua relação com o transmissor do conhecimento, analisando então sua postura pedagógica, a didática e a compreensão do que é ensinado. Veremos ainda porque a visão epistemológica é considerada necessária para compreensão do processo de formalização da matemática como ciência.

Sobre o conceito de aprendizagem matemática, veremos os fatores que a conceituam, as diferenças entre o saber e o conhecimento matemático, e ressaltar que apesar de termos diferentes essas duas ideias são totalmente conjuntas e devem ser exploradas ao mesmo tempo para que se possa obter o resultado desejado.

### 3 Implicações na maneira de ensinar

Tendo em vista as diversas concepções filosóficas, pode-se discorrer sobre diferentes práticas educativas. A partir dessa ideia observa-se uma vastidão de concepções diferentes, todas fundamentadas em argumentos válidos, fato que faz com que esse tema tome grande complexidade no contexto educacional. A Matemática se traduz por meio do trabalho do matemático: criação de conceitos, descoberta de teoremas e demonstrações, sistematizados por uma redação válida para uma comunidade específica.

O saber matemático se constitui de noções objetivas, abstratas e gerais, mas a construção da objetividade parte da subjetividade e de novas descobertas com muitos estudos e demonstrações, muitas tentativas e erros, reformulações até chegar ao resultado necessário, sendo sua busca principal a generalidade, algo que não deixe dúvidas e que vale para qualquer caso.

O trabalho do professor de matemática apresenta grande influência do trabalho do matemático, apesar de serem práticas totalmente diversas possuem uma forte ligação. Enquanto o professor tenta contextualizar de forma clara para a maior compreensão de seus alunos e busca o saber educacional e a evolução do conhecimento de seus alunos, o matemático em suas pesquisas sempre mantém a generalidade e busca o saber matemático.

A epistemologia é o estudo da evolução das ideias centrais e está diretamente ligada à construção e formação de conceitos, geralmente, está ligada à disciplina científica específica. A epistemologia da matemática é constituída pelo estudo da evolução de seus conceitos, como por exemplo os conjuntos numéricos. Tendo clara essa ideia pode-se concluir que a epistemologia do professor é correspondente à disciplina trabalhada e a sua epistemologia. Logo, isso envolve a postura pedagógica, a didática, a compreensão do que é ensinado, de métodos e valores.

A aprendizagem matemática tem em vista a exposição e o estímulo da busca pelo conhecimento do aluno, despertar o instinto investigativo, a curiosidade, o querer e procurar aprender/saber, induzir ao raciocínio lógico e investigativo. A tendência matemática da resolução de problemas pode ser implementada neste ponto, pois a mesma tem papel significativo quando se fala em investigar, já que essa metodologia faz com que o aluno desperte a curiosidade por determinado conteúdo e busque as respostas procuradas a partir de estímulos provocados pelo seu professor.

De acordo com Pais (2011), a diferença entre o saber e o conhecimento pode ser visto como o saber estando relacionado ao plano histórico da produção de uma área disciplinar e o conhecimento é visto como mais próximo ao fenômeno da cognição. Com essa diferenciação pode-se concluir que o saber científico é sua adequação o contexto acadêmico, e que também tende a ser despersonalizado e mais associado ao contexto histórico e cultural, do que aos desafios pessoais da aprendizagem.

O saber matemático refere-se a uma ciência que tem suas teorias estruturadas em um próprio contexto, independente de uma validação pessoal e isolada. Apresenta também um processo de elaboração da objetividade, que se traduz pelos procedimentos valorizados pelo método lógico dedutivo. (PAIS, 2011).

O conhecimento se refere a dimensão individual e subjetiva, sendo mais presente o caráter experimental e pragmático do que o aspecto teórico e racional. Por maior que seja o domínio cognitivo sobre o conceito, não é possível identificar o conceito com sua representação mental.

Na Educação Matemática estão presentes traços da influência de aspectos epistemológicos na prática pedagógica, isso é conhecido como contágio epistemológico, por ser consequência de uma influência administrada pelo professor. Isso deixa visível uma desordem entre a relação pedagógica, ao objeto de estudo da didática e ao saber científico, isso não ocorre somente em relação ao rigor, mas também às características como generalidade, abstração, objetividade e formalidade.

Fiorentini (1995) estabelece categorias que subdividem as tendências, uma delas é a tendência Formalista Clássica, a qual caracteriza-se pelo modelo euclidiano, que utiliza uma sistematização lógica do conhecimento, a partir de elementos primitivos, definições, axiomas e postulados. O objeto central é o professor, ele é o transmissor e expositor do conhecimento, a aprendizagem do aluno é passiva e consiste na memorização por meio de repetições.

De acordo com a tendência Empírico Ativista, como destaca Fiorentini (1995), o professor deixa de ser o foco principal, e passa a ser orientador e facilitador da aprendizagem, o aluno passa a ser o centro de aprendizagem, o uso de materiais manipulativos passa a entrar em pauta, juntamente com o trabalho em grupo. Para os empírico-ativistas o conhecimento matemático emerge do físico e é extraído pelo homem por meio dos sentidos. Euclides Roxo foi um dos principais pensadores desse movimento, no Brasil ele contribuiu para a unificar a Matemática e também para formular as diretrizes metodológicas do ensino da Matemática.

A tendência Formalista Moderna tinha em seus princípios unificar três campos fundamentais da Matemática: teoria de conjuntos, estruturas algébricas e relações e funções. Dando ênfase aos aspectos lógicos. Quanto à relação professor-aluno e ao processo de aprendizagem não houve mudanças significativas. (FIORENTINI, 1995).

A última das tendências, aqui mencionada, é a Tecnicista. Esta vertente tem por objetivo tornar a escola eficiente e funcional e aponta para solução de problemas de ensino e aprendizagem o emprego da pedagogia oficial do regime militar que era inserir a escola nos moldes de racionalização do sistema de produção capitalista.

A visão epistemológica é considerada como necessária para compreender como se compôs o processo de formalização da Matemática como ciência e possíveis implicações para a área de seu ensino. As três grandes escolas filosóficas do Formalismo, Intuicionismo e Logicismo da Matemática tiveram contribuições e implicações significativas para o ensino. Cada uma das três escolas, apresentavam adeptos de renome, os quais procuravam defender a essência de cada uma, apresentando uma nova compreensão de como deveria ser a Matemática restruturada, e as implicações dessas grandes escolas filosóficas no ensino da matemática como destaca Loureiro e Klüber (2015).

Os mesmos autores ressaltam que a escola do Logicismo visava reformular toda a matemática e reescrevê-la somente através de símbolos lógicos, em linguagem simbólica, tinha como

objetivo torná-la uma ciência sem contradições, reduzir a matemática em termos lógicos. Apoiava, demonstrar analiticidade de determinada proposição a partir das leis gerais da lógica. O Logicismo foi o ponto de partida e base para o desenvolvimento e formulação da lógica matemática moderna e para o desenvolvimento de um segundo grupo de matemáticos que, contrariamente aos logicistas, procuraram sistematizar a matemática, partindo sempre da intuição.

A escola Intuicionista na contramão do pensamento logicista, tinha por objetivo reformular a Matemática desde seus fundamentos, partindo sempre da intuição, os axiomas, os teoremas, enfim, toda a matemática deveria ser reconstruída, defendiam a existência de objetos matemáticos somente quando esses pudessem ser dados por construção, que algo abstrato só existe pela criação da mente humana. Assim a intuição, vinda dos atos de conhecimento próprios dos estados mentais dos sujeitos, conceitos, valores e sentimentos assumiria o papel de trazer a verdade das proposições matemáticas, não se restringindo somente a observação do que é exposto através dos sentidos no mundo externo, mas sim da razão introspectiva. (LOUREIRO; KLÜBER, 2015).

A escola Formalista tinha como principal intenção transformar toda a matemática clássica em um sistema formal consistente e completo, utilizando demonstrações procedendo a axiomatização de toda Matemática. O seu principal objetivo é provar as ideias matemáticas livres de contradições, a Matemática se tornaria livre de paradoxos e contradições e, quando ela pudesse ser reescrita com demonstrações rigorosas em um sistema formal, se estabeleceria como verdade.

## 4 Implicações na formação do professor

O ensino da Matemática passou por muitas mudanças durante toda sua história e isso se reflete diretamente na formação dos professores na atualidade. Pode-se perceber claramente ao compararmos a Escola Tradicional com a Escola Nova, sendo que a escola tradicional não possuía essa visão de estimular a reflexão das ações nas atividades realizadas no processo pedagógico, já a escola nova defendia o intuito de quebrar esses paradigmas, ou seja, um enfoque maior ao aprendizado, utilizando diferentes ferramentas ou técnicas.

Disciplinas ligadas a Filosofia, Psicologia, Sociologia e Historia Educação só passaram a compor a grade curricular de cursos de licenciaturas a partir de 1969. Mas somente houve a consolidação em 1996 com a "nova" LDB. Porém, as discussões sobre Educação Matemática somente se consolidaram em 1988 com a criação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM).

Durante todo o processo de formação o futuro educador está em contado com todas as concepções e formas de ensino, elas estão sendo apresentadas constantemente de formas distintas em diversas disciplinas de forma que o profissional adote aquela que se familiarizar melhor e que se encaixe melhor na sua prática pedagógica. Espera-se que o professor obtenha clareza sobre esses conceitos para que consiga aplica-los da maneira correta para transmitir claramente todos os conteúdos necessários e de forma que todos os alunos tenham oportunidade de se apropriar

desses conhecimentos.

A Educação Matemática é composta por processo educativo da mesma forma que os demais e tem por objetivo aquilo que é apresentado pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, (LDB, N° 9.394 de 1996) em seu artigo 2º, 9 é “[...] o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho” como destaca Brum (2012).

## 5 Ensino de matemática no Brasil

Estudos envolvendo relações aluno-professor-saber matemático estão sendo cada vez mais valorizados e reconhecidos como parte importante para a Educação Matemática, mas esses aspectos dinâmicos dessas interações nem sempre foram assim, passaram por um longo processo histórico de transformação.

O ensino de Matemática no Brasil apresentava formas e ideias da Tendência Formalista Clássica, até o fim da década de 50, caracterizado especialmente pela Matemática Clássica, modelo Euclidiano e a concepção platônica de Matemática.

Em oposição à Escola Tradicional Clássica surge a Tendência Empírico-Ativista na qual o professor deixa de ser elemento principal e se torna um mediador/orientador entre o aluno e o conhecimento matemático, levando em consideração o desenvolvimento psico biológico do aluno. Teve Euclides Roxo como um de seus grandes defensores no campo do ensino da matemática. No Brasil essa tendência contribuiu significativamente para a Reforma Francisco Campos (1931) e também no surgimento dos livros didáticos com ilustrações como uma forma de comunicação visual.

A Educação Matemática brasileira passou por um período de maior atenção com a realização dos cinco Congressos Brasileiros de Ensino de Matemática e pela participação de professores brasileiros no Movimento da Matemática Moderna que visava a reformulação e modernização do currículo escolar. A proposta concreta da implantação dessa Tendência Formalista Moderna começou a tomar força no Brasil por volta da década de 60, tomando força com a fundação do GEEM (Grupo de Estudantes da Educação Matemática).

A Tendência Tecnicista possui sua fundamentação no Behaviorismo, teve forte presença no período entre a década de 60 e o final da década de 70. Dentro dessa tendência é possível observar suas variações: o tecnicismo pedagógico, o tecnicismo mecânico e o método Kumon. Tem como objetivo capacitar o aluno a desenvolver habilidades estritamente técnicas para resolver problemas padrões. (LOUREIRO; KLÜBER, 2015).

Tendência Construtivista teve forte influência da epistemologia genética piagetiana dando início às inovações no ensino da Matemática. No Brasil percebeu-se a presença do Construtivismo piagetiano por volta das décadas de 60 e 70, tendo como principal divulgador o educador matemático Zoltan Dienes.

A Tendência Socioetnocultural foi sendo moldada após fracasso do Movimento Moder-

nista juntamente com as dificuldades de aprendizagem da Matemática por alunos das classes economicamente menos favorecidas, a partir da década de 60, levando a atenção de alguns estudiosos aos aspectos socioculturais da Educação Matemática. No Brasil a pesquisa educacional da década de 70 contribuiu que os alunos oriundos dessas classes sociais apresentavam carências culturais que os impediam de acompanhar a escola ou obter sucesso na educação formal, como destaca Fiorentini (1995).

## 6 Conclusão

A partir das reflexões estabelecidas buscou-se maior compreensão da evolução da Educação Matemática e principais escolas filosóficas, mas não somente no ensino mas na própria história da Matemática, pois essas escolas também deram uma nova visão aos matemáticos que puderam repensar em seus conceitos e seu próprio trabalho, e no desenvolvimento da Matemática, a forma em que as Tendências Matemáticas se manifestam no trabalho do professor e o formato que essas concepções se apresentam em sala de aula.

Este estudo nos fortaleceu a ideia de que o conhecimento da história da Matemática e das correntes filosóficas que influenciaram o desenvolvimento da Matemática oferecem um ótimo contexto para a compreensão das tendências atuais no ensino da Matemática.

## Agradecimentos

A esta instituição pelo excelente ambiente oferecido aos seus alunos e os profissionais qualificados que disponibiliza para nos ensinar.

À professora Andréia Büttner Ciani pela orientação, apoio e confiança na elaboração desse trabalho.

## Referências

- ARAÚJO, Viviane Raupp Nunes de. **A filosofia da educação Matemática na formação dos professores do ensino fundamental e médio**. Criciúma, 2005.
- BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Leis de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. **Diário Oficial da República Federativa do Brasil**, Brasília, D. F., 23 de dez. 1996, Título 2.
- BRUM, Mariza de Andrade. **Tendência pedagógica na educação matemática escolar: segundo estudos de Fiorentini**. III EIMAT Escola de Inverno de Educação Matemática; 1º Encontro Nacional PIBID-Matemática, 2012.
- CARVALHO, Dione Lucchesi de. **Discutindo Tendências no Ensino da Matemática**. II Semana de Educação Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, 2010.
- DAVIS, Philip; HERSH, Reuben. **A experiência matemática**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

- FIorentini, Dario. **Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil**. Revista Zetetiké. Campinas: UNICAMP, ano 3, n. 4, 1-36 p., 1995.
- LOUREIRO, Daniel Zampieri; KLÜBER Tiago Emanuel. **As escolas do Formalismo, Logicismo e Intuicionismo: Um olhar para o Ensino de Matemática**. XIV CIAEM-IACME, Chiapas, México, 2015.
- PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. 3.ed., Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

## O uso de jogos no ensino de operações com números racionais no ensino fundamental

Lucas Campos de Araújo<sup>1</sup>  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste  
kopier\_business@hotmail.com

Caroline Souza Santos<sup>1</sup>  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste  
carolainesouza16@outlook.com

Matheus Alexandre Alves Anzolin<sup>1</sup>  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste  
matheusalves2107@hotmail.com

Victoria Maria de Oliveira Santos<sup>2</sup>  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste  
vicmaria99@hotmail.com

**Resumo:** Este artigo objetiva expor algumas das atividades realizadas com turmas do 7º Ano, no Colégio Estadual Ieda Baggio Mayer pelos bolsistas de iniciação à docência do Programa Institucional de Iniciação a Docência (Pibid) discente de licenciatura em Matemática no ano de 2017. Estas atividades com jogos e materiais manipulativos tem como meta a valorização conjunta do método de ensino e do conteúdo a ser ensinado, além de evidenciar a importância da interação social dos atores no processo de ensino/aprendizagem. Para tal, são apresentados jogos e materiais aplicados e expõem-se as dificuldades apresentadas pelos discentes durante o desenvolvimento das atividades e como foram sanadas.

**Palavras-chave:** Jogos e materiais manipulativos; Papel do professor; Interação social.

### 1 Introdução

A intensa disseminação de informações na atualidade, viabilizada pelos meios tecnológicos, acarreta em uma sobrecarga para os seus atores, que em sua maioria não são capazes de analisar estes dados e compreendê-los em sua totalidade. Assim acabam por tirar conclusões precipitadas e não conseguem enxergar os pressupostos e consequências que estas carregam consigo. Tal característica é encontrada nas salas aula, nas quais alunos das mais diversas classes sociais, étnicas e culturais se reúnem em um ambiente que deve lhes favorecer o desenvolvimento de suas habilidades cognitivas, nas mais diversas áreas do conhecimento. No

---

<sup>1</sup>Aluno de licenciatura em Matemática e Bolsista de Iniciação à Docência do Subprojeto Matemática, do campus de Cascavel.

<sup>2</sup>Aluna de licenciatura em Matemática e Bolsista de Iniciação à Docência do Subprojeto Matemática, do campus de Cascavel.

entanto, nem sempre isto é possível em decorrência dos diferentes níveis de compreensão de cada indivíduo.

Tratando-se da educação, especificamente no Brasil, tem-se certa precariedade nas instituições de ensino, tanto em sua estrutura física quanto em seus referenciais teóricos, que por muitas vezes visam um ensino repetitivo voltado apenas à memorização suficiente de conteúdos para a aprovação ao final do período letivo. Assim deixa-se de lado a questão da compreensão dos conteúdos, o que implica em uma defasagem do desenvolvimento educacional e psicológico dos estudantes. Isto está em desacordo com o que prevê os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), nos quais se tem que o aluno precisa ser capaz de relacionar os conteúdos aprendidos com sua realidade, ou seja, na instituição de ensino em outras disciplinas e também em situações extraclasse. Além disso, prevê-se que o professor, do ensino Fundamental exponha situações que façam o aluno raciocinar de maneiras diferentes como na resolução de problemas.

Nesse contexto, valer-se de metodologias de ensino diferenciadas é um viés promissor para o desenvolvimento de uma educação de qualidade que garanta a apropriação dos conhecimentos e saberes das antigas gerações por todas aquelas que ainda estão por vir, ou seja, uma metodologia que se preocupe tanto com o conteúdo quanto com o método de ensino.

Em virtude desta necessidade de metodologias diferenciadas, no ensino de Matemática pode-se fazer uso dos jogos e materiais manipulativos de grande importância para compreensão de conceitos, possibilitando maior interesse pelos estudos, como também justificarem as matemáticas trabalhadas. O uso de jogos na Matemática proporciona um ambiente de interação contínua entre os alunos e o professor, ou seja, há o compartilhamento de conhecimento entre indivíduos em momentos de aprendizagem. Segundo Lara, “com a participação do/a aluno/a nos jogos e sua necessária participação ativa, o/a professor/a poderá perceber as suas reais dificuldades, auxiliando-o a saná-las.” (LARA, 2003, p. 25).

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais, tem-se que com os jogos o professor consegue analisar alguns aspectos relativos aos alunos, como a capacidade de compreender o processo do jogo, o autocontrole, a construção de estratégias, capacidade de criar hipóteses e analisar outras estratégias.

Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas. (BRASIL, 1998, p. 46)

A interação social é importante no ensino, visto que “o que a criança é capaz de fazer hoje em colaboração conseguirá fazer amanhã sozinha.” (VYGOTSKY, 2001, p.331) Isto quebra o paradigma de uma sala de aula enfileirada em que os discentes são apenas ouvintes do apresentador que é o professor expondo o conteúdo previsto na ementa curricular.

Os jogos relacionados à Matemática e trabalhados corretamente viabilizam um ambiente para o aluno interagir com o conteúdo de maneira própria, porém o fator fundamental da apren-

dizagem é a troca de ideias dos participantes do grupo, ou seja, a construção do conhecimento a partir de suas reflexões. Cada jogador passa a pensar diferentemente, em contato com o grupo e com o professor, resultando em uma aprendizagem distinta daquela que ele realizaria sozinho, visto que a aprendizagem se dá na passagem do interpsicológico para o intrapsicológico.

Entretanto, pode-se observar que muitas vezes o jogo é utilizado apenas por sua função lúdica, ou seja, somente por diversão e prazer, ou ainda, apenas como quebra de rotina. Assim a função educativa, aquela que propicia ao aluno adquirir ou reforçar conhecimentos por meio do mesmo é, muitas vezes, deixada de lado.

Outro aspecto importante a ressaltar, é a existência de uma diferença nos resultados obtidos em uma aula em que o professor apresenta um conteúdo com o material manipulável e uma em que os alunos o manuseiam, pois, de acordo com Lorenzato (2006), no segundo caso os resultados

[...] serão mais benéficos à formação dos alunos, porque, de posse do material manipulável, as observações e reflexões deles são mais profícuas, uma vez que poderão, em ritmos próprios, realizar suas descobertas e, mais facilmente, memorizar os resultados obtidos durante suas atividades? (LORENZATO, 2006, p. 27).

O professor por sua vez, tem o papel de analisar e reformular ideias de maneira a criar relações entre o jogo trabalhado e o conteúdo que se pretende que os alunos aprendam. Para tal, é necessário ser criterioso na escolha dos materiais a serem utilizados em sala, visto que nem sempre é fácil ou possível relacionar um conteúdo com um objeto lúdico, sem que haja perda de generalizações ou conceitos. Desta maneira o docente consegue partir de exemplos e contextualizações para conceitos mais complexos e generalizações, dando aos alunos acesso a esse conhecimento e conseqüentemente tornando-o algo de interesse ao invés de um dever. Assim os alunos conseguem compreender que as atividades funcionam como treinamento/preparação para a abstração.

[...] é necessário que o/a aluno/a utilize várias vezes o mesmo tipo de pensamento e conhecimento matemático, não para memorizá-lo, mas, sim, para abstraí-lo, estendê-lo, ou generalizá-lo, como também, para aumentar sua autoconfiança e sua familiarização com o mesmo. O treinamento pode auxiliar no desenvolvimento de um pensamento dedutivo ou lógico mais rápido. Muitas vezes, é através de exercícios repetitivos que o/a aluno/a percebe a existência de outro caminho de resolução que poderia ser seguido aumentando, assim, suas possibilidades de ação e intervenção. Além disso, o jogo de treinamento pode ser utilizado para verificar se o/a aluno/a construiu ou não determinado conhecimento, servindo como um "termômetro" que medirá o real entendimento que o/a aluno/a obteve. Entretanto, com a participação do/a aluno/a nos jogos e sua necessária participação ativa, o/a professor/a poderá perceber as suas reais dificuldades, auxiliando-o a saná-las. (LARA apud STRAPASON, 2011, p. 38).

Assim, cabe ao educador tomar-se ciente das necessidades apresentadas pelos alunos por meio de observações e análises das atividades por ele ministradas, de forma que produza os materiais lúdicos, concretos ou digitais, a serem utilizados nas aulas de apoio e também no período normal, pois estes facilitam vislumbrar determinados conteúdos o que acaba por dinamizar a aprendizagem.

A partir desta perspectiva, objetiva-se com este trabalho relatar algumas atividades desenvolvidas com o Jogo da Soma, o Jogo das Operações, o Baralho de Equações e o Jogo Encontre a Maior Fração em 2017, com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental II na disciplina de Matemática do Colégio Estadual Ieda Baggio Mayer (Cascavel, Paraná) que está vinculado ao Programa Institucional de Bolsa de Iniciação a Docência (PIBID) e as experiências vivenciadas no âmbito escolar com o ensino da Matemática ligado diretamente ao uso de jogos.

## 2 Baralho de Equações

Como planejado propusemos aos alunos dos sétimos anos o “jogo Baralho de equações<sup>3</sup>” do 1º grau com uma incógnita. A professora estava terminando o conteúdo de equações de primeiro grau e o jogo foi planejado para reforçar os conhecimentos repassados, de uma forma lúdica. Primeiramente os levamos até a área externa do Colégio e pedimos que eles se dividissem em quartetos, entregamos os jogos a eles e explicamos as regras.

O jogo, conforme figura 1, funciona como um baralho de pife. Um dos alunos deve ser o carteador e será escolhido conforme o acordo do grupo. O carteador deve distribuir seis cartas (as regras originais diziam para distribuir nove, porém percebemos que era mais fácil para eles jogar com seis cartas apenas) para cada jogador, uma a uma.



Figura 1: Jogo “Baralho de Equações com Uma Incógnita”

As cartas não usadas na distribuição foram colocadas sobre a mesa com a face virada para baixo e constituíram o monte de cartas para “compras”. Os alunos deviam avaliar as cartas recebidas e então, começando pelo aluno à esquerda do carteador, iniciava-se o jogo. Os jogos possíveis eram uma carta “equação original”, uma carta “isolar a variável”, e uma carta “solução”. As seqüências obrigatoriamente deviam ter no mínimo três cartas. O primeiro aluno sentado à esquerda do carteador comprava a carta de cima do monte de compras e tinha duas

<sup>3</sup>Graça, V. V. **O ensino de problemas do 1º grau por atividades**. Belém, 2011. Dissertação de mestrado em Educação. Coordenadoria de Pós-Graduação, Universidade do Estado do Pará

opções: ficar com a carta, se ela servisse no seu jogo ou descartá-la (as cartas descartadas ficam com a face virada sobre a mesa formando o monte de descartes).

O aluno seguinte tinha duas opções de compra: ou do monte de compras ou poderia pegar a última carta descartada sobre a mesa (apenas a última carta do monte de descartes poderá ser comprada), o jogo prosseguia com todos os jogadores comprando e descartando uma carta. Com a compra os alunos tentavam montar jogos com as cartas que recebiam na distribuição, e batiam a rodada. O aluno que primeiro conseguisse montar jogos com todas as suas cartas ganharia a rodada. Eram duas as formas de se bater o jogo: sem descarte combinando todas as cartas da mão ou com descarte combinando as cartas de forma a sobrar uma para o descarte final.

Inicialmente os alunos não entenderam como formar as trinças, então se explanou que eles deveriam pegar alguma carta “equação original”. As cartas que formam uma trinça com essa, eram as cartas nas quais a incógnita aparecia isolada e a em que já é determinado o valor de  $x$ . Assim com exemplos eles entenderam, porém percebemos que eles não tinham muitas estratégias de jogo, pois viam que a carta que precisavam já estava no “lixo”, porém não mudavam suas cartas o que ocasionou que até o fim da aula apenas um dos cinco grupos havia tido um ganhador da partida.

No caso deles terem a carta do resultado final, seria muito mais difícil para eles encontrarem a trinça, pois teriam várias possibilidades. Também percebemos que muitos alunos ainda tinham dificuldades em resolver equações principalmente por não saberem quais operações são inversas uma das outras

### 3 Encontre a maior fração

O jogo utilizado era conhecido como “Encontre a Maior Fração<sup>4</sup>”. Ele possuía 12 cartas, sendo oito números naturais e as outras quatro com as representações dos sinais das operações fundamentais da aritmética ( $\div$ ,  $\times$ ,  $+$ ,  $-$ ). Jogou-se em quartetos, divididos em duas duplas. Uma das duplas iniciou o jogo e sorteou quatro números e uma operação. Com os números os alunos deviam montar duas frações e realizavam a operação sorteada, objetivando encontrar a maior fração. Em seguida, a dupla adversária repetia os mesmos passos e no final comparavam as frações resultantes e pontuava quem tivesse a maior fração.

Inicialmente explicamos aos alunos as regras do jogo, em seguida simulamos uma rodada e entregamos a eles uma folha para o registro dos cálculos. Notamos que a maioria dos alunos não compreendeu que ao montar as frações eles já poderiam escolher a melhor opção para obter o maior resultado possível e assim posteriormente só dependeriam da sorte de seus adversários obterem uma fração menor.

---

<sup>4</sup>LIMA, A. A.; LIMA, E. F. F.; PEREGRINO, L. A.; PADILHA, S. L.; LANGER, A. E. S. **Experiências no processo de ensino e aprendizagem das frações**. In: ANTUNES, F. A. BASSOI, T. S. TOILLIER, J. S. LANGER, A. E. S. CIANI, A. B. KLUBER, T. E. (org.) **Propostas didáticas de matemática**. Porto Alegre: Evangraf: Unioeste, 2016, p. 95-124.

Na folha de registro, propusemos que escrevessem quais critérios utilizaram para a escolha das frações para que o resultado da operação sorteada fosse o maior possível. Responderam que escolhiam as maiores, entendidas como frações impróprias, porém isso não é válido para todas as operações. O fato de alguns grupos sortear a operação de multiplicação na primeira rodada pode ter influenciado a afirmação anterior. Outros alunos não responderam à questão apesar de ajudarmos a todos, questionando o porquê de cada afirmação e conduzindo-os para o que desejávamos que respondessem.

Alguns dos objetivos do jogo foram proporcionar aos alunos uma compreensão melhor das operações com frações, de forma a reforçar o que eles haviam aprendido em sala; incentivar os alunos a criarem estratégias para vencer o jogo, envolvendo o raciocínio lógico; proporcionar interação entre os alunos, a professora e nós.

Percebemos que eles tinham bastante dificuldade em comparar frações, pois não tinham claro quando uma razão era maior que um e também não pareciam preocupados em pensar estratégias para pontuar no jogo que era obter a maior fração. Fez-se necessária nossa intervenção com questionamentos para incentivá-los a pensar. Alguns grupos entenderam estratégias e passaram a utilizá-las, porém outros continuaram a jogar por jogar.

Notamos dificuldade em expressar raciocínios, o que mostra que não estão habituados a responder questões de matemática de forma escrita. No registro das operações, constatamos que não encontraram dificuldade nas operações de multiplicação e divisão de frações. Nas operações de adição e subtração, alguns somaram e subtraíram o numerador com numerador e denominador com denominador, valendo-se das mesmas propriedades operatórias dos números naturais. Questionamos se os cálculos faziam sentido e relembramos como realizar tais operações.

O jogo foi um instrumento diagnóstico das dificuldades apresentadas por alguns alunos. Os resultados obtidos indicam que é possível fazer uso do jogo em sala de aula como um instrumento motivador para o processo de ensino aprendizagem, visto que as atividades desenvolvidas proporcionaram momentos significativos de aprendizagem, enriquecidas por discussões e reflexões adequadas à complementação do estudo sobre frações.

## 4 Jogo da Soma e das Operações

Propusemos uma atividade diferenciada, com o intuito de fazer com que os alunos praticassem os conteúdos até então abordados, a respeito de operações básicas e potenciação com números inteiros, sem a necessidade de exercícios repetitivos. Para tal fizemos uso do “Jogo das Operações<sup>5</sup>” e do “Jogo da Soma<sup>6</sup>”, os quais foram confeccionados por nós, que por ser um elemento lúdico sempre atrai maior atenção por parte dos alunos em comparação a um exercício na lousa.

<sup>5</sup>Jogos matemáticos, adaptado, Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=eGMQ75bHmH8> Acessado em 10 ago. 2017.

<sup>6</sup>Jogos matemáticos, adaptado, Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=eGMQ75bHmH8> Acessado em 10 ago. 2017.

O “Jogo das Operações”, conforme figura 2, era composto por quatro dados enumerados de 0 a 6 e uma cartela com quatro trilhas enumeradas de 0 a 10, além de marcadores para os jogadores. Neste, os alunos precisariam utilizar todas as operações que soubessem com os números sorteados nos dados, para chegar ao número desejado, o qual era exatamente o número seguinte em que o marcador do jogador se encontrava. No início do jogo todos os marcadores estavam na casa do número zero, o jogador vencedor foi aquele que chegou primeiro a casa de número dez ou ficou mais próximo desta casa.

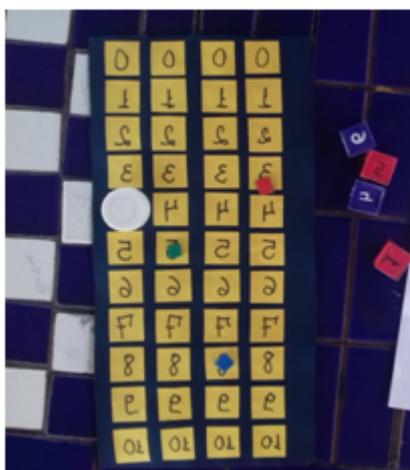


Figura 2: “Jogo das Operações”

Os discentes foram divididos em grupos de quatro integrantes, em que cada grupo possuía sua própria particularidade. Pode-se citar um grupo, no qual aparentemente os alunos tinham mais facilidade de montar as operações para se chegar ao número, montavam expressões numéricas não usuais, usando não somente adição, subtração e multiplicação, mas potenciação e radiciação, assim chegavam ao resultado formando uma expressão que nem mesmo nós que estávamos auxiliando tínhamos pensado naquela possibilidade.

Uma situação que comprovou a facilidade de operar deste grupo refere-se a quando os três dados deram um mesmo número, chamá-lo-ei de  $x$ , e o dado que restava deu-lhes o número 1, o objetivo deles era obter o número 1. Para tal, realizaram um operação no mínimo incomum para alunos deste ciclo de ensino, expressando como  $x^{x-(x.1)}$ .

Já em outro grupo, tinha-se rivalidade entre os integrantes que não desistiam até encontrar a solução, muito embora se sentissem seguros em utilizar apenas as quatro operações básicas. Por não haver um tempo limite para cada um realizar as jogadas, a rivalidade ficou ainda mais evidente. Vale ressaltar que em nenhum momento se mostraram alterados entre si.

Percebeu-se também, que em alguns grupos houve o zelo quanto ao registro das contas. No entanto, havia um grupo no qual os integrantes reclamavam muito pelo fato de um colega estar manipulando os dados ao seu bel prazer a fim de se chegar ao resultado, por não ter domínio das operações.

Algumas dificuldades mais comuns apresentadas pelos discentes neste jogo foram quando

os dados disponibilizavam apenas números pares e o número a ser encontrado era um ímpar, este tipo de situação fazia com que os alunos refletissem um pouco mais na resolução indagando a possibilidade de utilizar outras operações além das básicas. Porém tais dificuldades foram superadas durante a experiência com o jogo, perto de acabar a aula, tinham-se alunos usando potenciação e radiciação de modo a simplificar as expressões.

No que diz respeito ao “Jogo da Soma”, conforme figura 3, o qual era constituído de uma cartela com quatro trilhas enumeradas de -6 a 6 e com dois dados, um vermelho representando os números negativos e um azul representando os números positivos, ambos enumerados de 0 a 6. Teve-se de modo geral, maior empenho, visto que os alunos o consideraram mais fácil que o outro. Neste os alunos tinham que realizar operações de adição e subtração de forma que o jogar que chegasse mais vezes nas casas dos números -6 e 6 ganhava o jogo.

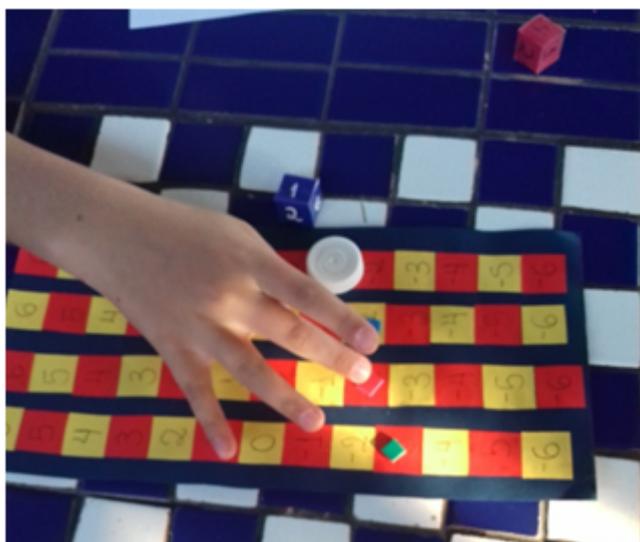


Figura 3: “Jogo da Soma”

No início do jogo os alunos se mostraram menos empolgados, por conta de operarem apenas com duas operações, até um pouco confusos quanto ao objetivo central do jogo. Porém próximo ao final do jogo a situação mudou, pois todos os alunos já estavam completamente concentrados em ganhar. Em suma não houve dificuldades apresentadas pelos grupos no decorrer deste jogo, o que mostra uma compreensão sobre operações de adição e subtração com números inteiros.

## Considerações Finais

Em virtude do desenvolvimento destas atividades com os alunos, foi possível observar tanto na prática quanto nos testes avaliativos uma melhora significativa de seus desempenhos e interesse. Assim concluí-se que o resultado obtido fora relativamente positivo e ainda um grande passo dado para o entendimento dos alunos no que diz respeito ao uso das expressões e operações com os números racionais. No entanto, algo frustrante a relatar é a displicência de

alguns estudantes com relação aos registros cobrados, visto que alguns até mesmo amassaram as folhas e as jogaram no lixo para posteriormente entrega-las, enquanto outros alunos as fizeram com zelo.

## Agradecimentos

Este trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), entidade do governo brasileiro voltada para a formação de recursos humanos.

## Referências Bibliográficas

- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática/Secretaria de Educação Fundamental**. Brasília: MEC/SEF, 1997/1998.
- LARA, I. C. M. **Jogando com a Matemática na Educação Infantil e Séries Iniciais**. São Paulo: Rêspel, 2003.
- LIMA, A. A.; LIMA, E. F. F.; PEREGRINO, L. A.; PADILHA, S. L.; LANGER, A. E. S. **Experiências no processo de ensino e aprendizagem das frações**. In: ANTUNES, F. A. BASSOI, T. S. TOILLIER, J. S. LANGER, A. E. S. CIANI, A. B. KLUBER, T. E. (org.) **Propostas didáticas de matemática**. Porto Alegre: Evangraf: Unioeste, 2016, p. 95-124.
- LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.
- STRAPASON, Lísie Pippi Reis. **O uso de jogos como estratégia de ensino e aprendizagem da Matemática no 1º ano do Ensino Médio**. Centro Universitário Franciscano (UNIFRA). Santa Maria (RS), 2011.
- VIGOTSKY, L.S. (2001). **A construção do pensamento e da linguagem**. São Paulo. Editora Martins Fontes.



## Resolução de um problema de programação inteira por meio do algoritmo Árvores da Montanha

Amarildo de Vicente  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE  
amarildo.vicente@gmail.com

André Wilson de Vicente  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE  
madarassenju63@gmail.com

Rogério Luiz Rizzi  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE  
rogeriorizzi@hotmail.com

Cláudia Brandelero Rizzi  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE  
claudia\_rizzi@hotmail.com

**Resumo:** Este trabalho apresenta um procedimento destinado a resolver problemas de programação linear inteira. Tal procedimento é baseado em uma heurística que simula o processo de reprodução do reino vegetal, a fim de minimizar funções não lineares. Para testar o procedimento proposto foram resolvidos alguns modelos idealizados para este trabalho e também alguns casos do clássico problema da mochila. O método proposto ainda está em fase inicial de estudo mas em todos os testes realizados foram obtidos bons resultados, satisfazendo as expectativas iniciais.

**Palavras-chave:** Minimização; programação inteira; problema da mochila.

### 1 Introdução

A busca por métodos alternativos para resolver problemas de programação linear inteira (ppli) se justifica porque grande parte dos problemas deste tipo são de natureza combinatorial e os métodos mais eficientes comumente empregados para este fim consomem muito tempo de processamento, tornando-se às vezes inviáveis. O procedimento descrito neste trabalho emprega um método heurístico destinado à minimização de funções não lineares. Conforme será descrito na seção 3, esta heurística se baseia no processo reprodutivo presente no reino vegetal. A fim de empregar tal heurística na resolução de um ppli algumas adaptações precisam ser feitas, com o uso de funções de penalidades.

### 2 Embasamento teórico

Como se sabe da literatura de otimização, ver por exemplo Bradley, Hax e Magnant (1977), todo problema de programação linear (ppl) pode ser escrito na forma

$$\text{Minimizar } z = \sum_{i=1}^n c_i x_i \tag{01}$$

sujeita a:

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_1,$$

$$g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_2,$$

...

$$g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_m,$$

$x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$ , sendo que  $g_1, g_2, \dots, g_m$  são funções lineares de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

De forma mais condensada este modelo pode ser representado por

$$\text{Minimizar } z = \sum_{i=1}^n c_i x_i \tag{02}$$

sujeita a:

$$g_j(x) \leq b_j, j = 1, \dots, m,$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, n, x \in \mathbb{R}^n$$

Quando as variáveis do problema são todas inteiras ele é chamado de problema de programação linear inteira (ppli) e é representado por

$$\text{Minimizar } z = \sum_{i=1}^n c_i x_i \tag{03}$$

sujeita a:

$$g_j(x) \leq b_j, j = 1, \dots, m,$$

$$x_i \geq 0 \text{ e inteiro, } i = 1, \dots, n, x \in \mathbb{Z}^n$$

Há uma variedade muito grande de problemas desta natureza, aplicados a transportes, distribuição de tarefas, processamento de produtos, etc., ver por exemplo Goldburg e Luna(2005). Alguns problemas desta categoria são famosos pela dificuldade computacional que impõem. Como exemplo podem ser citados o problema do caixeiro viajante e o problema do carteiro chinês. Um caso especial de ppli ocorre quando as variáveis assumem apenas os valores 0 ou 1, chamadas de variáveis binárias.

O método mais tradicionalmente empregado para resolver um ppli é o *Branch and Bound*, criado em 1960 por por A. H. Land e A. G. Doig, ver Land e Doig(1960). O método *Branch and Bound* faz uso do método simplex para gerar uma árvore de possibilidades, razão pela qual pode requerer um grande esforço computacional dependendo do problema tratado. O método que está sendo proposto também faz uso do simplex, mas apenas para obter o ponto de partida. Sua estrutura computacional é composta por funções de penalidades e por uma meta-heurística destinada à otimização de funções não lineares.

### 3 Descrição do método

Conforme mencionado, o método proposto requer o uso de funções de penalidades e também de uma meta-heurística, chamada de Árvores da Montanha.

### 3.1 Meta-heurística Árvores da Montanha

Esta heurística é baseada no processo de reprodução de diversas espécies de plantas bem como no seu formato físico. Como se sabe, o processo de renovação no reino vegetal, que pode ser sexuado ou assexuado, ocorre de diversas formas. No caso do processo sexuado, no qual esta meta-heurística é fundamentada, este tipo de reprodução é feita por meio da polinização, que pode ser realizada por meio do vento, de insetos, de aves, etc. Para o algoritmo em questão, enfatiza-se o processo de reprodução sexuado, conhecido como anemofilia, em que a polinização é realizada principalmente pelo vento. Outro fator também bastante relevante para o processo é levar em conta que a planta considerada se desenvolve bem em regiões montanhosas, cujo relevo pode ser matematicamente comparado com o gráfico de uma função não linear  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . A ideia do algoritmo é reunir características de diversas plantas em uma única planta fictícia. Estas características se referem à forma de reprodução, forma de polinização, formato da planta, forma do relevo onde se desenvolve, entre outras. Por causa das características consideradas, quando uma planta adulta está em um ponto alto do relevo, espera-se que a maioria dos grãos de pólen conduzidos pelo vento sejam levados para regiões mais baixas. Por este motivo, dado um conjunto de árvores adultas (mães), a maioria das plantas mais novas (filhas) deve nascer nas partes que estão em altitudes mais baixas em relação às suas mães, fazendo com que as novas gerações convirjam para os vales. O propósito do algoritmo é simular este comportamento para obter o ponto de mínimo global de uma função não linear positiva  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Mais detalhes sobre este processo podem ser vistos em Vicente e Camicia (2009) e em Vicente, Rizzi, B. e Rizzi, C. (2012).

### 3.2 Função de penalidades externa

O método proposto consiste na combinação de duas funções de penalidades, uma delas aqui chamada de externa, ou seja, para pontos fora da região viável, e outra, aqui chamada de interna, aplicada a pontos com coordenadas não inteiras dentro da região viável. A primeira delas é clássica na área de otimização e a segunda está sendo proposta pelos autores.

A ideia do método das penalidades é transformar um problema de programação não linear (*ppnl*) com restrições em um *ppnl* irrestrito, ver Bazaraa(2006). Este procedimento consiste em adicionar as restrições à função objetivo com alguns ajustes apropriados.

Consideremos um problema contendo uma única restrição de desigualdade como segue.

Minimizar  $z = f(x)$

sujeita a

$$g(x) \leq 0,$$

$$x \in \mathbb{R}^n.$$

Seja a função  $p(x)$  dada  $p(x) = \mu[\max\{0, g(x)\}]^2$ , onde  $\mu$  é uma constante grande e positiva. Se trocarmos o modelo anterior por

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } z &= f(x) + p(x), \\ x &\in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

então a função  $z$  sofrerá um incremento (penalidade) sempre que  $g(x) > 0$ . A função  $p$  é chamada de função de penalidade. A resolução de um *ppnl* com o uso de penalidades é feita por meio de um algoritmo iterativo e, embora a constante  $\mu$  deva ser grande, é necessário que ela seja iniciada com valores pequenos e incrementada gradativamente. Isto dá um melhor desempenho ao método, evitando, por exemplo, problemas de instabilidade numérica.

De um modo geral, consideremos um *ppnl* com  $m$  restrições de desigualdade da forma

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } z &= f(x) \\ \text{sujeita a} \\ g_j(x) &\leq 0, \quad j = 1, \dots, m, \\ x &\in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Neste caso a função de penalidades pode ser representada por

$$p(x) = \mu \sum_{i=1}^m [\max\{0, g_i(x)\}]^k,$$

onde  $k$  é um inteiro positivo. Com isto o problema anterior pode ser representado pelo seguinte *ppnl* irrestrito:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } z &= f(x) + p(x), \\ x &\in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Para métodos que empregam derivadas é importante escolher  $k$  de forma que a função  $p$  seja diferenciável. Na explanação anterior tomou-se  $k = 2$ . Maiores detalhes podem ser vistos em Bazaraa(2006).

### 3.3 Função de penalidades interna

A função aqui chamada de função de penalidades interna tem por finalidade impor uma penalidade aos pontos da região viável cujas coordenadas não são todas inteiras.

Seja  $x$  um número real,  $x \geq 0$ , e consideremos a função  $h(x) = (1 - \text{frac}(x))\text{frac}(x)$ , onde  $\text{frac}(x)$  representa a parte fracionária do número  $x$ . Com  $h$  definida desta forma tem-se,  $h(x) = 0$  se  $x$  for inteiro e  $0 < h(x) < 0.25$  se  $n < x < n + 1$ ,  $n \geq 0$  e inteiro. A função  $h$  é crescente para  $n \leq x \leq n + 0.5$  e decrescente para  $n + 0.5 \leq x \leq n + 1$ , atingindo valor máximo 0.25 em  $x = n + 0.5$ .

Consideremos agora a função  $w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $w(x) = h(x)e^{-(x-a)^2}$ , em que  $a$  é um ponto fixado. De acordo com o exposto e tendo em vista que  $0 < e^{-(x-a)^2} < 1$ ,  $w$  é uma função que assume valor 0 quando  $x$  é inteiro e  $0 < w(x) < 0.25$  quando  $n < x < n + 1$ . A soma da função  $w$  com uma função  $f$  linear <sup>1</sup>, ambas com o mesmo domínio, produz uma função  $\phi$  cujo gráfico possui um aspecto de bolha na vizinhança de  $a$ , preservando a imagem de  $f$  para

<sup>1</sup>O conceito de função linear muda de autor para autor

valores inteiros de  $x$ .

A Figura 1 mostra como fica o gráfico de  $\phi = f + w$  para  $0 \leq x \leq 5$ , sendo  $f(x) = 4 - 0.8x$  e  $a = 2.5$ .

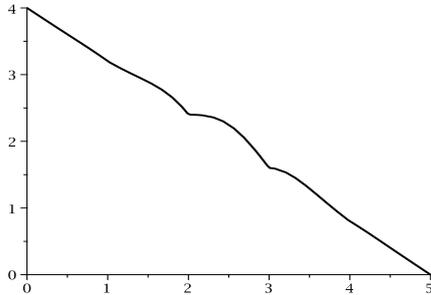


Figura 1: Gráfico mostrando aspecto de bolha na vizinhança de  $a = 2.5$

Para uma função  $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ , fixado um ponto  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  então a função  $w$  tem o formato  $w = [\sum_{i=1}^n h(x_i)]e^{\sum_{i=1}^n -(x_i - a_i)^2}$ . A Figura 2 mostra como fica o gráfico de  $\phi$  para  $f(x, y) = 16 - 4x - 2y$  e  $(a_1, a_2) = (2.6, 2.6)$

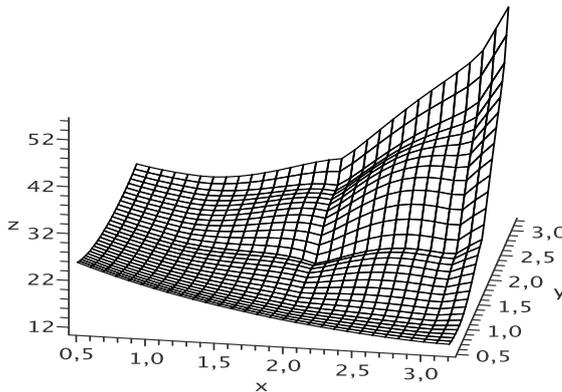


Figura 2: Gráfico mostrando aspecto de bolha na vizinhança de  $(a_1, a_2) = (2.6, 2.6)$

O método que está sendo proposto consiste em resolver o *ppnl* a seguir, resultante da modificação do *ppli* (03) com o uso das funções de penalidades citadas.

$$\text{Minimizar } z = \sum_{i=1}^n c_i x_i + \alpha [\sum_{i=1}^n h(x_i)] e^{\sum_{i=1}^n -(x_i - a_i)^2} + \mu \sum_{j=1}^m [\max\{0, g_j(x)\}]^2,$$

em que  $x \in \mathbb{R}_+^n$  e  $(a_1, \dots, a_n)$  é a solução fornecida pelo método simplex para o *ppl* (01).

Conforme abordado anteriormente, Seção 3.2, optou-se por tomar  $k = 2$  na função de penalidades da direita.

Um fato a ser destacado é que a função de penalidades  $w$  afeta todos os pontos, dentro e fora da região da região viável. Porém, o comportamento da função exponencial faz com que atuação de  $w$  seja bastante insignificante para pontos distantes do ponto  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

## 4 Validação do método

O método proposto foi implementado na linguagem Pascal por meio do software livre Lazarus. A fim de avaliar seu desempenho foram feitas algumas simulações com problemas idealizados e de soluções conhecidas.

### Ilustração 1

Consideremos o problema

Minimizar  $z = 12x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 20x_4$

sujeita a:

$$20x_1 + 25x_2 + 10x_3 + 12x_4 \geq 40,$$

sendo  $x_1, x_2, x_3$  e  $x_4$  binárias.

A Tabela 1 a seguir mostra todas as possíveis combinações para  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ .

Tabela 1: Possíveis combinações para a quádrupla  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$

<i>Pontos</i>	$z$	rest	<i>Pontos</i>	$z$	rest
(1, 1, 1, 1)	57	67	(0, 1, 1, 1)	45	47
(1, 1, 1, 0)	37	55	(0, 1, 1, 0)	25	35
(1, 1, 0, 1)	42	57	(0, 1, 0, 1)	30	37
(1, 1, 0, 0)	22	45	(0, 1, 0, 0)	10	25
(1, 0, 1, 1)	47	42	(0, 0, 1, 1)	35	22
(1, 0, 1, 0)	27	30	(0, 0, 1, 0)	15	10
(1, 0, 0, 1)	32	32	(0, 0, 0, 1)	20	12
(1, 0, 0, 0)	12	30	(0, 0, 0, 0)	0	0

Como pode ser observado, a melhor solução é a quádrupla  $(1,1,0,0)$ , quarta linha da primeira coluna, conferido o valor 22 para  $z$  ( $z^* = 22$ ). Obviamente há outros valores menores para  $z$ , mas todos violam a restrição.

Embora este procedimento seja simples de compreender, ele é inviável do ponto de vista computacional. Para um problema com  $n$  variáveis ele requer  $2^n$  combinações, como na ilustração anterior em que foram geradas  $2^4$  combinações.

Empregando o método proposto para resolver este problema obteve-se esta mesma solução,  $(1, 1, 0, 0)$ , com um tempo processamento desprezível.

### Ilustração 2

Maximizar  $z = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 + 18x_4$

sujeita a:

$$11x_1 + 16x_2 + 15x_3 + 12x_4 \leq 80,$$

$$x_1 + x_2 \leq 7,$$
$$x_2 + x_3 + x_4 \leq 4,$$

sendo  $x_1, x_2, x_3, x_4$  inteiras e não negativas.

Primeiramente, como este problema é de maximização, é necessário modificá-lo para minimização, bastando para isto trocar o sinal da função  $z$ . A solução ótima para ele, a quádrupla  $(4, 0, 0, 3)$ , foi encontrada sem qualquer dificuldade com tempo de processamento desprezível. O valor máximo neste caso é  $z^* = 94$ .

### Ilustração 3

Um problema clássico do programação linear inteira é o problema da mochila. Uma das várias versões existentes para este problema tem o seguinte modelo:

$$\text{Maximizar } z = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

sujeita a:

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i \leq M,$$

sendo  $x_i \geq 0$  e inteiro.

Este problema consiste em transportar o máximo número de objetos, em um total de  $n$  itens. O item  $i$  tem um custo  $c_i$  por unidade e um peso  $w_i$ . O número  $M > 0$  representa a capacidade máxima de transporte. Eventualmente pode-se querer limitar a  $L > 0$  o total transportado de um determinado item. Neste caso o modelo tem o formato

$$\text{Maximizar } z = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

sujeita a:

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i \leq M,$$

$$x_i \leq L_i, i = 1, \dots, n,$$

sendo  $x_i \geq 0$  e inteiro.

Considere a situação em que a matriz de custos é

$$C = [72, 28, 32, 36, 50, 65, 30, 57, 50, 20, 46, 28, 12, 22, 15, 20, 55, 60, 40, 41, 44, 56, 22, 61, 65, 18, 50, 50, 65, 28],$$

a matriz de pesos é

$$W = [22, 28, 27, 30, 56, 28, 38, 45, 60, 20, 10, 38, 24, 38, 18, 20, 45, 62, 45, 70, 22, 90, 50, 40, 44, 45, 64, 89, 68, 35],$$

a matriz de limites para objetos é

$$L = [5, 5, 4, 8, 4, 2, 5, 1, 5, 6, 1, 2, 6, 6, 7, 8, 2, 9, 3, 4, 4, 3, 6, 2, 8, 2, 7, 5, 4, 2] \text{ e } M = 3200.$$

Este problema contém 30 variáveis. A aplicação do método apresentou como solução a matriz  $S = [5, 5, 4, 8, 2, 2, 5, 1, 5, 6, 1, 1, 0, 0, 7, 8, 2, 9, 3, 0, 4, 0, 0, 2, 2, 0, 1, 0, 4, 2]$ , que produz valor máximo  $z^* = 3626$ . O tempo médio de processamento em 100 execuções foi de 0.2 segundo. Esta é a mesma solução fornecida pelo software livre Glpk.

### Ilustração 4

Para o mesmo problema da mochila anterior, consideremos os dados a seguir para 50 variáveis

em  $M = 3200$ .

Matriz de custos:  $C = [72, 28, 32, 36, 50, 65, 30, 57, 50, 20, 46, 28, 12, 22, 15, 20, 55, 60, 40, 41, 44, 56, 22, 61, 65, 18, 50, 50, 65, 28, 36, 48, 30, 28, 44, 65, 68, 98, 45, 42, 69, 29, 37, 43, 19, 26, 55, 16, 78, 86]$

Matriz de pesos:

$W = [22, 28, 27, 30, 56, 28, 38, 45, 60, 20, 10, 38, 24, 38, 18, 20, 45, 62, 45, 70, 22, 90, 50, 40, 44, 45, 64, 89, 68, 35, 26, 15, 12, 22, 23, 17, 25, 5, 9, 14, 12, 21, 19, 33, 27, 30, 21, 10, 31, 27]$

Matriz de limites para objetos:

$L = [5, 5, 4, 8, 2, 2, 5, 1, 5, 6, 1, 2, 6, 6, 7, 8, 2, 9, 3, 4, 4, 3, 6, 2, 8, 2, 7, 5, 4, 2, 3, 5, 7, 9, 1, 3, 5, 3, 5, 4, 4, 2, 8, 3, 1, 4, 7, 6, 5, 2]$ .

Para esta configuração o método encontrou apenas uma solução aproximada  $S$ , dada por  $S = [5, 5, 4, 8, 0, 2, 0, 1, 0, 6, 1, 0, 0, 0, 0, 8, 2, 1, 0, 0, 4, 0, 0, 2, 8, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 5, 7, 9, 1, 3, 5, 3, 5, 4, 4, 2, 8, 3, 0, 1, 7, 6, 5, 2]$ . O tempo médio de processamento em 100 execuções foi de 2.1 segundos. Esta solução produz valor máximo aproximado  $z = 6321$ , que está próximo do valor máximo exato fornecido pelo software Glpk,  $z^* = 6322$ .

## 5 Conclusões

O método proposto apresentou um bom desempenho para os problemas testados, tanto para aqueles apresentados neste texto quanto para uma variedade de outros testes realizados. O trabalho de pesquisa ainda está na fase inicial e um dos aspectos que precisa ser investigado e melhorado é a existência de uma grande quantidade de pontos de mínimos locais, o que gera dificuldades na obtenção da solução ótima para problema de grande porte.

## Referências

- BAZARAA, Mokhtar S.; SHERALI, Hanif D.; SHETTY, C. M. **Nonlinear Programming: Theory and Algorithms**. 3rd. ed. John Wiley & Sons Inc., Hoboken, New Jersey, 2006.
- BRADLEY, Stephen, P.; HAX, Arnaldo C.; MAGNANTI, Thomas L. **Applied Mathematical Programming**. Addison-Wesley Publishing Company, 1977. 735 p.
- GOLDBARG, Marco Cesar; LUNA, Henrique Pacca L. **Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos**. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005. 518 p.
- LAND, A. H.; DOIG, A. G. **An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems**. *Econometrica*, [s.l.], v. 28, n. 3, p.497-520, jul. 1960. JSTOR. <http://dx.doi.org/10.2307/1910129>.
- VICENTE, A.; CAMICIA, R. G. M. **Um Processo Não Determinístico Natural para Otimização**. *Synergismus Scyentifica, UTFPR*, v. 4, n. 2, 2009.
- VICENTE, Amarildo; RIZZI, Rogério Luis; RIZZI, Cláudia Brandelero. **O Algoritmo Árvore da Montanha com o Auxílio de Buscas Unidirecionais**. Anais da XXVIII SAM da Unioeste, Campus de Cascavel, 2009.

## Um estudo sobre a infiltração de água em calçada de *pavers*

Amarildo de Vicente  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE  
amarildo.vicente@gmail.com

André Wilson de Vicente  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE  
madarassenju63@gmail.com

Wilson Alves de Oliveira  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE  
Wilson.Oliveira@unioeste.br

**Resumo:** Este trabalho apresenta os primeiros resultados de um experimento que visa avaliar a infiltração da água, no decorrer do tempo, em uma calçada construída com *pavers*. A pesquisa almeja avaliar tanto a quantidade de água que infiltra entres os blocos quanto a quantidade que escorre sobre a calçada, porém, neste trabalho serão apresentados apenas resultados relativo ao segundo caso. Uma calçada deste material geralmente é feita com peças justapostas e os vãos existentes entre eles são preenchidos com areia. As amostras apresentadas neste trabalho foram obtidas para três tipos de areia, relativamente ao tamanho máximo de seus grãos. A classificação foi feita por meio de peneiramento e para isto foram utilizadas duas peneiras, uma com malha de 2 mm e outra com malha de 5 mm. Para os três tratamentos realizados a análise das primeiras amostras indica uma tendência de diferença de um deles para os demais.

**Palavras-chave:** Calçada ecológica; permeabilidade em *pavers*; calçada permeável.

### 1 Introdução

Com a crescente urbanização das cidades cresce a quantidade de calçadas e de pavimentações asfálticas, o que dificulta a infiltração das águas das chuvas no solo. O resultado é muita enxurrada e consequentes transtornos, especialmente nos grandes centros urbanos. Uma das iniciativas que têm sido adotadas para amenizar o problema é a construção das chamadas calçadas ecológicas, que podem ser constituídas de gramíneas ou de materiais apropriados para este fim. Dentre os materiais comumente adotados encontra-se os *pavers*, que hoje é facilmente encontrado no mercado e que é de fácil colocação. No entanto a sua eficiência em relação à infiltração de água é duvidosa quando a calçada já está instalada há muito tempo. A suspeita é de que após alguns anos a aglomeração de detritos entre as fendas existente entre as peças fiquem compactas e impeçam que haja a infiltração de água desejada.

## 2 Pressupostos teóricos e expectativas

Atualmente existe uma grande preocupação com questões ambientais e também com as catástrofes provocadas por enxurradas, principalmente nas grandes cidades. Por este motivo está-se difundindo por todo o Brasil o uso das chamadas calçadas ecológicas, que são feitas de tijolos, geralmente de concreto, chamados de *pavers*, ver por exemplo os trabalhos de Santos et al. (2015) e Ramos(2015). Estes tijolos são fabricados de modo que sua colocação lado a lado deixe uma fenda que é preenchida com areia. Na base dos *pavers* é posta uma camada, também de areia, ou de pó de pedra, este último mais comumente empregado. O objetivo é fazer com que parte da água das chuvas penetre pelas fendas deixadas pelo *pavers* evitando que escorra pelas ruas. Suspeita-se no entanto que, com o passar do tempo, esta infiltração se torne ineficiente e é este fato que está sendo investigado por meio de ensaios periódicos e coleta de dados. Do ponto de vista da Estatística, para aferir uma conclusão plausível sobre determinada investigação há que se obter uma amostra representativa de dados sobre o fenômeno investigado. Este fato é importante pois para se fazer uma análise de dados rigorosa é essencial que a amostra se enquadre em uma determinada distribuição de probabilidades. Como pode ser visto por exemplo em Devore (2006), quando a amostra possui acima de 30 observações pode-se aceitar que a média tem distribuição normal. Mas, tendo em vista que o trabalho ainda está em fase inicial, apenas quatro amostras estão à disposição. A coleta completa de dados deverá ser feita ao longo de um a dois anos, tempo em que se espera que alguma conclusão possa ser tirada. Durante este período é possível que sejam realizados cerca de 15 ensaios para cada uma de três unidades investigadas, totalizando 45 amostras.

## 3 Material e metodologia

A fim de fazer a investigação mencionada foi construído um protótipo de calçada com inclinação de 1%, adaptada para que seja possível fazer a coleta de água artificialmente jogada sobre ela. Tanto a água que escorre pela calçada quanto a que infiltra devem ser investigadas no experimento, todavia, neste trabalho serão apresentados apenas dados relativos à porção relativa ao primeiro caso. A construção da calçada experimental foi feita em local privado, a fim de evitar eventuais danos durante o experimento. Sua estrutura ficou assim constituída:

1. Em primeiro lugar, com tijolos de seis furos foi construída no chão uma base em forma de “Us” justapostos, 3 no total, a fim de manter suspensa a estrutura da calçada. No solo, em cada vão foi feito um declive no terreno a fim de que a água infiltrada escoe para um ponto de coleta. Estes Us citados são as unidades experimentais, que serão chamadas de U1 U2 e U3, da direita para a esquerda na Figura 1.



Figura 1: Base das unidades experimentais

2. Esta estrutura foi coberta com uma lona cuja finalidade é fazer com que a água vá para o ponto de coleta sem infiltrar no solo.
3. Uma grade de ferro coberta com uma tela de arame e outra de nylon foram colocadas sobre a estrutura base, já coberta com a lona.
4. Sobre a tela de nylon foi depositada uma camada com cerca de 3 cm de pó de pedra, material encontrado em depósitos de materiais de construção.
5. Sobre o pó de pedra foi construída a calçada, ver Figura 2. Para cada uma das unidades experimentais foi empregado um tipo de areia, classificada por meio de duas peneiras. A primeira possui uma malha quadriculada de 2 mm e a segunda possui malha também quadriculada de 5 mm. Vamos chamar de PMF a peneira de malha fina e de PMG a peneira de malha grossa. O primeiro tipo de areia é a que passou pela peneira PMG, praticamente areia comum usada em construção. Esta areia foi usada na unidade U1. O segundo tipo é a que passou pela peneira PMF, areia fina geralmente usada para reboco. Esta areia foi usada na unidade U2. Finalmente, o terceiro tipo é a que passou pela peneira PMG e que ficou retida na peneira PMF. A areia resultante foi empregada na unidade U3.



Figura 2: Calçada utilizada para o experimento

6. Além da calçada foi montado um sistema de irrigação para simular a chuva, formado por uma caixa d'água suspensa a 2 m de altura e por tubos de pvc. O terminal de irrigação é constituído por um tubo de pvc de 1,5 m de comprimento contendo 30 furos de 1 mm de diâmetro.

Em cada ensaio foi empregado um total de 30 litros de água para cada unidade experimental. Esta água é jogada sobre a calçada em forma de chuvisco e o tempo gasto para completar o escoamento em cada unidade é de cerca de 25 minutos. A coleta foi feita em dia sem chuva e a calçada foi sempre molhada 18 horas antes do experimento a fim de manter o padrão de umidade.

## 4 Análise dos resultados

Conforme já mencionado, o experimento citado ainda está em fase inicial, de modo que ainda não se tem uma amostra significativa de dados. O que se tem no momento é um conjunto de quatro amostras para cada unidade experimental, que não permite uma análise estatística mais rigorosa. Todavia, pode-se notar claramente uma tendência de diferença de um dos tratamentos para os demais. Como pode ser observado na Tabela 1, na unidade U1 praticamente não houve escoamento de água, ou seja, quase toda a água passou pelos vãos dos *pavers*. Já nas unidades U2 e U3 isto não ocorreu, ou seja, boa parte da água escorreu pela calçada, e em uma situação real ganharia a rua. Observando os dados e também os gráficos apresentados nas Figuras 3 e 4 parece haver uma tendência de que a unidade U1 seja mais permeável do que as unidades U2 e U3.

Tabela 1: Volume de água (litros) que fluiu por cima da calçada

Unidade 1	Unidade 2	Unidade 3
0.5	5	2.45
0	6.55	6
0	11.5	8
0	7.8	4.1

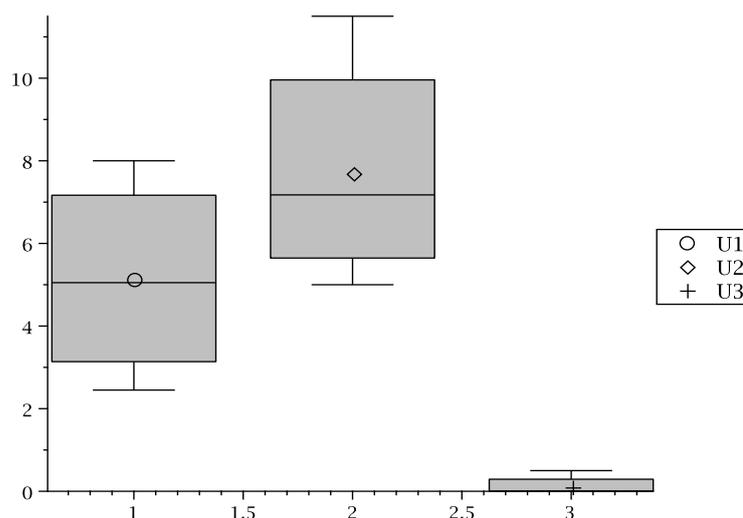


Figura 3: Visualização dos dados experimentais em *box plot*

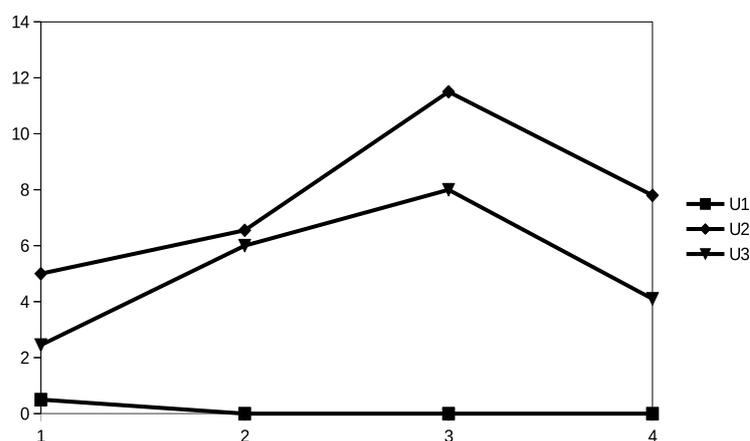


Figura 4: Visualização dos dados experimentais em linhas de dispersão

## Referências

- DEVORE, Jay L. **Probabilidade e Estatística: engenharia e ciências**. 6a. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2006.
- RAMOS, Gabriela Dutra; PARLANDI, Ricardo Rodrigues; PEREIRA, Aquiria Alvarenga. A Calçada Ecológica e seus Benefícios. De Magistro de Filosofia, Ano VIII, n. 15, 2015.
- SANTOS, Layara de Paula Souza; CUBA, Renata Medici Frayne; LEITÃO, Valéria de Souza; SANTOS NETO, Agenor de Souza. **Análise da eficiência de calçadas ecológicas como sistema de drenagem sustentável nos centros urbanos: estudo de caso no Parque Flamboyant, Goiânia, Goiás**. Revista Eletrônica em Gestão, Educação e Tecnologia Ambiental, UFSM, Santa Maria, v. 19, n. 3, set-dez. 2015, p. 837-849. DOI: 105902/2236117018345



## Modelos de otimização estrutural dimensional em treliças

Paula Yumi Takeda<sup>1</sup>  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
pytakeda@gmail.com

Renato Massamitsu Zama Inomata  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
renato.inomata@gmail.com

Simone Aparecida Miloca  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
simone.miloca@unioeste.br

Paulo Domingos Conejo  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
paulo.conejo@unioeste.br

**Resumo:** Este trabalho envolve o estudo de problemas de otimização estrutural em engenharia. Esta área é geralmente categorizada em três tipos principais: otimização dimensional, de forma e de topologia. Neste artigo serão apresentados problemas de otimização estrutural dimensional, mais especificamente otimização de treliças. Treliças são estruturas muito utilizadas em coberturas de instalações prediais, em torres de energia, em pontes, entre outros, e são recomendadas para suportar cargas elevadas e superar vãos na construção. Sua otimização envolve minimização do peso e, consequentemente de volume, por meio da escolha adequada dos diâmetros e áreas de suas barras, respeitando-se as restrições de equilíbrio estático e os limites das tensões de ruptura do material. Uma discussão acerca da construção dos modelos é apresentada bem como um exemplo numérico.

**Palavras-chave:** Otimização; Treliças; Engenharia.

### 1 Introdução

Diversos projetos de engenharia envolvem a criação de novos e sofisticados produtos devendo seu desenvolvimento ser assistido com a aplicação de ferramentas computacionais baseadas em métodos científicos bem estabelecidos, visando a análise da estrutura, a otimização e a sensibilidade de parâmetros.

Atualmente, a pesquisa científica na área de análise estrutural tem aumentado de forma considerável, utilizando-se técnicas modernas que procuram sistematizar o processo através de alguma metodologia. As técnicas de otimização mostram-se extremamente atraentes nesse aspecto, pois é possível estruturar modelos quantitativos onde é possível formular matematicamente um problema de busca de soluções melhores dentre as diversas possíveis (GOLDBARG e LUNA, 2005; ZIONTS, 2006).

---

<sup>1</sup>Agradecimento à Unioeste pelo apoio financeiro concedido

A ideia geral em um problema de otimização é construir uma função denominada função objetivo, que será maximizada (ou minimizada) e está sujeita a restrições de igualdade ou desigualdade. Matematicamente escreve-se:

$$\begin{aligned} \text{Min } & f(x) \\ \text{sujeito a } & h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, r \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

onde,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas, geralmente diferenciáveis.

Para a solução de problemas desta natureza, técnicas exatas e algoritmos do campo da Programação Matemática podem ser utilizados (GOLDBARG e LUNA, 2005; ZIONTS, 2006; TAHA, 2008).

Segundo Deb (2002), em um problema de projeto de engenharia, a meta é minimizar ou maximar um objetivo de projeto e simultaneamente satisfazer um conjunto de restrições de igualdade ou desigualdade. Representando variáveis de projeto como um vetor de números reais  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ , um problema de projeto otimizado em engenharia é usualmente expresso como um problema de otimização geralmente envolvendo funções não lineares.

Neste sentido, os problemas de otimização estrutural consistem em um processo que visa a obtenção de uma configuração da estrutura que resulta em uma performance ótima segundo medidas de desempenho pré-definidas (mínima massa, máxima rigidez, etc.). Além disso, são satisfeitas restrições tanto sobre as variáveis de projeto, quanto sobre o comportamento da estrutura (tensão de ruptura, deslocamentos permitidos, etc.). A área de otimização estrutural pode ser categorizada em três tipos principais: otimização dimensional, de forma e de topologia.

De acordo com Okruta (2014), a otimização dimensional busca encontrar as dimensões da estrutura que minimizem seu custo de fabricação ou peso. A otimização de geometria ou de forma busca a posição dos nós e a área da seção transversal em projetos que envolvam barras de forma a minimizar o custo final da estrutura e garantir que ela não falhe. A otimização de topologia estrutural consiste na modificação do padrão de conectividade ou a disposição espacial dos elementos e/ou membros da estrutura (topologia) com vistas a um índice de performance ótimo.

Apresentamos neste trabalho modelos de problemas de otimização estrutural dimensional, mais especificamente de otimização de treliças. As treliças são muito utilizadas em estruturas de cobertura de instalações prediais, em pontes, entre outros, e são recomendadas para suportar cargas elevadas e superar grandes vãos na construção civil, sua otimização envolveu minimização do peso e, conseqüentemente de volume, por meio da escolha adequada dos diâmetros e áreas de suas barras, respeitando-se as restrições de equilíbrio estático e os limites das tensões de ruptura do material (SORIANO, 2013).

## 2 Otimização de Treliças Planas

A otimização dimensional busca obter as dimensões da estrutura que minimizem seu custo de fabricação ou peso com respeito às restrições de ordem estrutural (OKRUTA, 2014). Deste modo, em uma estrutura treliçada plana define-se a função objetivo como o mínimo da função massa da estrutura, haja vista que se considera que na maioria dos casos, como estruturas metálicas por exemplo, o peso é proporcional ao custo da treliça quanto as barras, elementos de ligação e custos de montagem. Assim, a otimização visa minimizar a massa total e, conseqüentemente, o custo da estrutura, no entanto sem danificar sua integridade e segurança.

Diferentes formulações são apresentadas na literatura (HAFTKA e GURDAL, 1991; DEB, 2002; CHRISTOFORO, MARCONATO e OLIVEIRA, 2007; SOUZA, 2009; OLIVEIRA e FALCON, 2013), sendo que algumas diferenças ocorrem com relação a inserção de uma ou outra restrição. Em sua modelagem Haftka e Gurdal (1991) e Souza (2009) otimizaram a massa de uma estrutura treliçada sujeita a restrições de tensão axial e deflexão, estas literaturas ainda apresentaram dois algoritmos de busca de solução: programação linear sequencial, pois o problema foi linearizado, e algoritmo genético.

Oliveira e Falcon (2013) também otimizaram a massa de uma estrutura treliçada sujeita a restrições de tensão axial e deflexão, porém o problema visou a otimização geométrica da estrutura. Já Christoforo, Marconato e Oliveira (2007) ao modelar o problema minimizaram a área da seção transversal dos elementos de barra em função apenas dos deslocamentos nodais da estrutura através do Método de Newton.

A seguir apresentamos uma das formulações do modelo, que foi utilizado para testes numéricos realizados neste trabalho.

### 2.1 Função Objetivo

A função objetivo a ser minimizada é escrita em função das áreas da seção transversal das barras, modeladas como variáveis de projeto, e das posições dos nós, considerando que a estrutura possui sua geometria e topologia fixada. Fixou-se também a forma da seção transversal das barras como circular para fins de simplificação do modelo gerado.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad M(A_1, A_2, \dots, A_m) &= \sum_{i=1}^m \rho_i A_i L_i \\ A_1, A_2, \dots, A_m &\in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (1)$$

onde,

- $M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é a massa da estrutura;
- $\rho_i$  é a massa específica do elemento  $i$ ;
- $L_i$  é o comprimento da barra  $i$ ;

- $A_i$  é a área da seção transversal da barra  $i$ ;
- $m$  é o número de barras da estrutura.

Adotou-se que os elementos da treliça apresentam mesmo tipo de material, então a função na Eq. 1 pode ser escrita como :

$$M = \rho_i \sum_{i=1}^m A_i L_i \quad (2)$$

## 2.2 Restrições

As restrições foram formuladas de maneira a respeitar os limites das tensões de ruptura do material e evitar deflexões na estrutura para que não haja desconforto aos usuários e danos à segurança. Assim as restrições consideradas foram:

- Restrição às tensões axiais/normais

As estruturas treliçadas são uma solução econômica para projetos, elas resistem à esforços normais, de compressão e tração. No entanto, como todo elemento estrutural, deve-se prever em dimensionamento a tensão máxima de ruptura (HIBBELER, 2009). Neste sentido, restringiu-se a tensão em cada elemento de barra.

$$\sigma_i^c \leq \sigma_i \leq \sigma_i^t \quad \forall i = 1, \dots, m$$

Onde  $\sigma_i$  é a tensão normal atuante na barra  $i$ ;  $\sigma_i^c$  é a tensão normal de compressão admissível na barra  $i$ ;  $\sigma_i^t$  é a tensão normal de tração admissível na barra  $i$ .

- Restrição ao deslocamento da estrutura

Segundo NBR 8800 (ABNT, 2008), a estrutura deve atender a um Estado Limite de Serviço com relação ao seu deslocamento, pois pode prejudicar a estética, a durabilidade e a funcionalidade da estrutura. Deste modo, é necessário limitar o valor máximo de deslocamento dos elementos componentes da treliça.

$$U_i \leq U_i^{lim} \quad \forall i = 1, \dots, m$$

Onde  $U_i$  é o deslocamento na barra  $i$ ;  $U_i^{lim}$  é o deslocamento máximo admissível na barra  $i$ .

- Restrição à área da seção transversal na análise contínua

Estabeleceu-se condições de contorno para as áreas da seção transversal das barras, de forma a não permitir que os elementos desapareçam durante o processo de otimização.

$$A_i^{min} \leq A_i \quad \forall i = 1, \dots, m$$

Onde  $A_i$  é a área da seção transversal da barra  $i$ ;  $A_i^{min}$  é a área mínima da seção transversal da barra  $i$ ;  $m$  é o número de barras da estrutura.

### 3 Exemplo numérico

Os resultados numéricos apresentados a seguir foram obtidos através da otimização do modelo apresentado na seção anterior para o problema da treliça de 10 barras (Figura 1) presente na literatura de Haftka e Gurdal (1991) e Souza (2009). Os testes foram realizados para os parâmetros de entrada apresentados na Tabela 1 e os resultados são apresentados nas Tabelas 3 e 4.

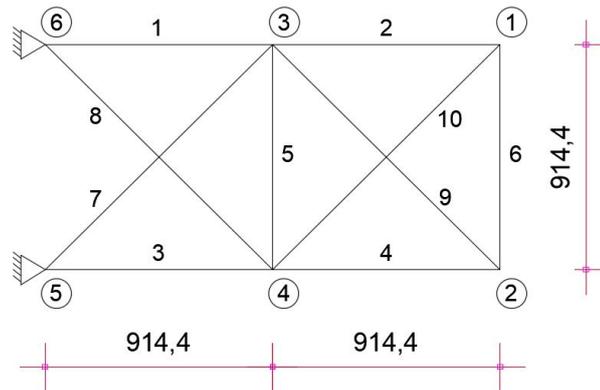


Figura 1: Treliça plana de 10 barras

A Tabela 1 apresenta os dados de entrada para o algoritmo de otimização, bem como as propriedades do material utilizado.

Módulo de elasticidade ( $kN/cm^2$ )	6895
Massa específica ( $kg/cm^3$ )	$2767 \times 10^{-6}$
Tensão normal de compressão admissível ( $kN/cm^2$ )	-17,2
Tensão normal de tração admissível ( $kN/cm^2$ )	17,2
Deslocamento máximo admissível ( $cm$ )	$\pm 5,08$

A partir da numeração apresentada na Figura 1, uma carga externa (P) atua nos nós 2 e 4, conforme Tabela 2.

Nó	$P_x$ ( $kN$ )	$P_y$ ( $kN$ )
2	0	-444,89
4	0	-444,89

Assim, com respeito às restrições impostas no modelo obteve-se as áreas de seção transversal ótimas para cada elemento (Tabela 3) e a massa ótima da estrutura (Tabela 4):

Conforme resultados apresentados nas Tabelas 3 e 4, os valores das variáveis de projeto e função objetivo obtidos mostraram-se promissores, próximos e coerentes com os resultados obtidos na literatura.

Tabela 3: Áreas ótimas obtidas e comparação com Souza (2009) e Haftka e Gurdal (1991)

Barras	Área inicial ( $cm^2$ )	Área final ( $cm^2$ )	Souza ( $cm^2$ )	Haftka e Gurdal ( $cm^2$ )
1	32,26	196,93	202,4	196,92
2	32,26	0,65	0,65	0,65
3	32,26	149,73	149,94	149,69
4	32,26	98,22	92,52	98,2
5	32,26	0,65	0,65	0,65
6	32,26	3,54	0,65	3,55
7	32,26	48,19	55,23	48,13
8	32,26	135,71	131,23	135,75
9	32,26	138,9	135,1	138,91
10	32,26	0,65	0,65	0,65

Tabela 4: Massa ótima obtida e comparação com Souza (2009) e Haftka e Gurdal (1991)

	Inicial	Final	Souza	Haftka e Gurdal
Massa (kg)	1315	2295,1	2284	2295

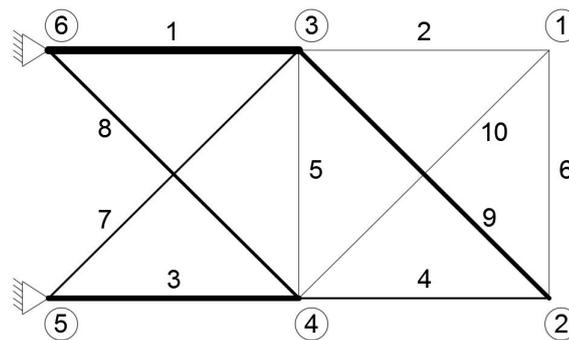


Figura 2: Treliça plana de 10 barras - Configuração final

Na Figura 2 é possível verificar visualmente a configuração final da estrutura otimizada. Observa-se, também, que as áreas são relativamente maiores para as barras mais solicitadas. Assim, otimizou-se a massa final da estrutura através da redução das áreas das barras menos solicitadas, mantida a segurança.

## 4 Conclusões

Foi desenvolvido um modelo matemático para o problema de minimização de massa de estruturas treliçadas, submetidas à restrições de tensão e deslocamento. Conforme dados obtidos o modelo e algoritmo desenvolvido apresenta bons resultados, coerentes com os que constam na literatura.

Considerado a extensão da treliça estudada, a massa final obtida da estrutura foi relativamente baixa, resultado do processo de minimização da mesma. Conseqüente à redução de

massa há um decréscimo de custo de material necessário para estrutura de forma a manter as condições de segurança e conforto dos usuários.

Logo, verifica-se a importância de técnicas de otimização na concepção de uma estrutura. Deste modo, o projetista obtém uma configuração ótima de estrutura sem a necessidade de grande experiência na área, dado que este processo, muitas vezes, se caracteriza por uma evolução lenta e suscetível a muitos erros.

## Agradecimentos

Para execução deste projeto de iniciação científica, agradecemos o apoio financeiro concedido pela Unioeste.

## Referências

- ABNT, NBR. **8800: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios**. Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2008.
- CHRISTOFORO, A.; MARCONATO, S. A. S.; OLIVEIRA, R. Z. G. **Otimização numérica da área das seções transversais dos elementos componentes de estruturas planas do tipo treliça**. Revista Brasileira de Biometria, São Paulo, v. 25, p. 57-69, 2007.
- DEB, K. **Multi-objective optimization using evolutionary algorithms**. John Wiley & Sons, 2002.
- GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. L. **Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos**. São Paulo, Elsevier, 2005.
- HAFTKA, R. T.; GÜRDAL, Z. **Elements of Structural Optimization**. Springer Science & Business Media, 1991.
- HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. Pearson Prentice Hall, São Paulo, 7ed., 2009.
- OKRUTA, M. **Three-dimensional topology optimization of statically loaded porous and multi-phase structures**. University of Rhode Island, Open Access Master's Teses, Paper 347, 2014.
- OLIVEIRA, S.; FALCON, G. **Otimização geométrica de treliças planas utilizadas em coberturas metálicas**. Rio de Janeiro, Vértices, v. 15, p. 101-115, 2013.
- SORIANO, H. L. **Estática das estruturas**. Rio de Janeiro, 3ed, Ciência Moderna, 2013.
- SOUZA, R. P. **Otimização de treliças com restrições de falha combinando técnicas de programação de algoritmos contínuos e discretos**. Dissertação de mestrado em engenharia mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2009.
- TAHA, H. A. **Pesquisa Operacional: uma visão geral**. São Paulo, Pearson Prentice Hall, 2008.
- ZIONTS, S. **Linear and integer programming**. Rio de Janeiro, Prentice Hall, 2006.



## Solução para a equação da onda via transformada de Fourier

Murilo Gabriel de Maceda<sup>1</sup>  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
murilodemaceda@gmail.com

André Vicente  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
andre.vicente@unioeste.br

**Resumo:** A Equação da Onda é uma equação diferencial parcial que descreve diversos tipos de propagação de ondas que ocorrem na natureza. No presente trabalho, utilizamos uma ferramenta matemática muito útil, a Transformada de Fourier, para encontrar a solução de um problema de valores iniciais envolvendo a equação da onda. Antes de provarmos o resultado principal, foi necessário um embasamento teórico a respeito de equações diferenciais parciais e transformada de Fourier. Para tanto, foi usado principalmente o livro *EDP - Um curso de Graduação* de Iório (2010) como referencial teórico. A transformada de Fourier possui uma interessante propriedade de transformar um operador diferencial em um operador algébrico. Assim sendo, aplicamos tal propriedade na equação da onda, de forma a transformá-la em uma equação diferencial ordinária. Em seguida, com o emprego de algumas técnicas analíticas e com o cálculo da transformada inversa, encontramos a solução da equação.

**Palavras-chave:** equações diferenciais parciais; transformada de Fourier; equação da onda.

### 1 Introdução

As equações diferenciais parciais são de grande importância para diversos campos da ciência como Biologia, Economia, Engenharia e Física, pois expressam muitas leis destas áreas. Isso porque é comum a existência de modelos científicos que envolvem em sua formulação taxas de variação instantânea e conseqüentemente derivadas.

Uma ferramenta matemática muito útil na resolução de problemas de evolução, isto é, equações diferenciais parciais cuja função incógnita depende do tempo, é a transformada de Fourier  $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  de uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , a qual é dada por

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx.$$

Uma das equações que podem ser solucionadas com o auxílio da Transformada de Fourier é a Equação da Onda, que modela fenômenos relacionados a vibrações e a propagações de ondas. O resultado principal deste trabalho será estabelecer um teorema que garante a existência de

<sup>1</sup>O autor agradece ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) por bolsa de iniciação científica concedida ao mesmo.

solução para a equação da onda. Mais precisamente, dadas  $f \in C^2(\mathbb{R})$  e  $g \in C^1(\mathbb{R})$ , queremos encontrar uma função  $u : \mathbb{R} \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{aligned}u_{tt} - u_{xx} &= 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\u(x, 0) &= f(x), & x \in \mathbb{R}, \\u_t(x, 0) &= g(x), & x \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

No presente trabalho, estabeleceremos e provaremos um teorema que garante a existência de solução para um problema de valores iniciais envolvendo uma equação diferencial parcial de evolução. Para demonstrar este teorema, serão utilizadas técnicas envolvendo a transformada de Fourier de uma função. Conforme descrito anteriormente, a referência base deste trabalho foi Iório (2010). Veja também Folland (2013).

## 2 Definições Básicas

Uma *equação diferencial parcial* (EDP) é uma equação envolvendo duas ou mais variáveis independentes  $x, y, z, t, \dots$  e derivadas parciais de uma função  $u = u(x, y, z, t, \dots)$ . De maneira mais precisa, uma EDP em  $n$  variáveis independentes  $x_1, \dots, x_n$  é uma equação da forma

$$F(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}) = 0 \quad (1)$$

onde  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ ,  $\Omega$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $F$  é uma função dada e  $u = u(x)$  é a função a ser determinada.

A classificação de EDPs segundo ordem e linearidade é semelhante à classificação das equações diferenciais ordinárias (EDOs). A *ordem* de uma EDP é dada pela derivada parcial de maior ordem que ocorre na equação; por exemplo, a ordem da equação (1) é  $k$  se  $F$ , como função de alguma das derivadas de ordem  $k$ , é não constante. Uma EDP é dita *linear* se é de primeiro grau em  $u$  e em todas as suas derivadas parciais que ocorrem na equação; caso contrário a EDP é dita *não linear*.

Denotamos por  $C^k(\Omega)$  o conjunto das funções  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   $k$  vezes continuamente diferenciáveis e por  $C(\Omega)$  o conjunto das funções  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas.

A solução geral de uma EDP, quando for possível achá-la, envolve funções arbitrárias das variáveis independentes. No caso de EDPs, o espaço das variáveis independentes é multidimensional: procura-se soluções definidas em um aberto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Quando são impostas condições sobre o valor da solução e de suas derivadas no bordo da região (*condições de contorno*) temos um *problema de contorno*. Condições de contorno aparecem de maneira natural na descrição de fenômenos estacionários (independentes do tempo).

Como no caso de EDPs há mais de uma variável independente (por exemplo  $x$  e  $t$ ), é natural fixar uma das variáveis (por exemplo  $t = 0$ ) e impor o valor da solução e de suas derivadas parciais em relação à variável fixa como função das outras variáveis (por exemplo  $u(x, 0) = f(x)$  e  $u_t(x, 0) = g(x)$ ,  $f$  e  $g$  funções dadas). O conceito de *condições iniciais* pode ser

generalizado impondo o valor da solução e de suas derivadas normais ao longo de uma curva (se  $n = 2$ ) ou superfície (se  $n = 3$ ) inicial. O problema correspondente é um *problema de Cauchy* ou de *valor inicial*.

### 3 A Transformada de Fourier

Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  for integrável em qualquer intervalo  $[a, b]$  e se a integral imprópria

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b |f(x)| dx < +\infty \quad (2)$$

existir, então a função  $\widehat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\widehat{f}(\xi) = (\mathcal{F}f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx \quad (3)$$

estará bem definida para qualquer  $\xi \in \mathbb{R}$  e será chamada de *transformada de Fourier de  $f$* . O problema fundamental da teoria é tentar recuperar  $f$  de sua transformada e tal problema é resolvido para uma classe especial de funções.

O *espaço de Schwartz*, denotado por  $S = S(\mathbb{R})$ , é a coleção das funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  infinitamente diferenciáveis em  $\mathbb{R}$  tais que, quaisquer sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^+$ , existe uma constante  $C_{\alpha, \beta}$  com

$$|x^\alpha f^{(\beta)}(x)| \leq C_{\alpha, \beta}, \quad \forall x \in \mathbb{R}; \quad (4)$$

$f^{(\beta)}$  é a  $\beta$ -ésima derivada de  $f$ . Nota-se que as funções de  $S$  tendem a zero em  $\pm\infty$  rapidamente: de fato, se  $n \in \mathbb{N}$  e  $f \in S$ ,

$$|x^n f(x)| \leq C \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{C}{|x^n|}, \quad x \neq 0,$$

logo  $f(x) \rightarrow 0$  quando  $|x| \rightarrow +\infty$  mais rápido que o inverso de qualquer polinômio. É claro que, se  $f \in S$ , então a função  $g(x) = x^\alpha f^{(\beta)}(x)$  também está em  $S$  quaisquer que sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^+$ : ela é infinitamente diferenciável e  $x^{\alpha'} g^{(\beta')}(x)$ , quaisquer que sejam  $\alpha', \beta' \in \mathbb{Z}^+$ , é uma soma finita de termos da forma  $x^n g^{(m)}(x)$ , logo limitada. Finalmente, é evidente que  $S$  é um espaço vetorial complexo e que o produto (pontual) de funções de  $S$  está em  $S$ .

**Proposição 1.** *Se  $f \in S$  então  $f' \in S$  e*

$$\widehat{f}'(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

*Prova.* Já mostramos que  $f' \in S$ . Calculando a transformada de Fourier de  $f'$ ,

$$\begin{aligned} \widehat{f}'(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ f(x)e^{-i\xi x} \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} - (-i\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx \right] \\ &= i\xi \widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

□

Um argumento simples de indução mostra que:

**Corolário 2.** Se  $f \in S$  e  $n \in \mathbb{N}$ , então  $f^{(n)} \in S$  e

$$\widehat{f^{(n)}}(\xi) = (i\xi)^n \widehat{f}(\xi). \quad (6)$$

Os resultados acima são muito profundos. A Proposição 1 nos diz que o operador diferencial  $\frac{d}{dx}$  agindo em  $S$  é levado, via transformada de Fourier, no operador de multiplicação por  $i\xi$  no espaço  $\{\widehat{f} : f \in S\}$ . Isso nos permite transformar equações diferenciais ordinárias em equações algébricas e reduzir equações diferenciais parciais a equações diferenciais ordinárias.

**Teorema 3.** A transformada de Fourier  $\mathcal{F}$  define uma bijeção linear de  $S$  em si mesmo e sua inversa é dada por

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{i\xi x} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}, f \in S. \quad (7)$$

## 4 A Operação de Convolução

Seja  $f \in S$  e seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  limitada e seccionalmente contínua em qualquer intervalo fechado. A *convolução* de  $f$  e  $g$  é a função  $f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x - y)dy, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Nota-se que a integral em (8) converge pois, como  $g$  é limitada, existe  $M > 0$  tal que

$$|g(x)| \leq M, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e, portanto,

$$|f(y)g(x - y)| \leq M|f(y)| \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)g(x - y)| dy \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| dy < +\infty.$$

**Teorema 4.** Se  $f, g \in S$ , então  $f * g \in S$  e

$$\widehat{f * g}(\xi) = \sqrt{2\pi} \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

## 5 Resultado Principal

Seja a Equação da Onda

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) &= 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) &= f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) &= g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (10)$$

onde  $f \in C^2(\mathbb{R})$  e  $g \in C^1(\mathbb{R})$  são dadas.

Para resolver este problema, primeiramente introduzimos uma função auxiliar. Seja  $a > 0$ ,

$$\begin{aligned} \chi_{[-a,a]} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \chi_{[-a,a]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{se } x \notin [-a, a] \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

**Lema 5.** Temos que, para todo  $x \in \mathbb{R}$ , vale

$$\widehat{\chi}_{[-a,a]}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{sen}(ax)}{x}. \quad (12)$$

*Prova.* Aplicando a Transformada de Fourier em (11), obtemos

$$\begin{aligned} \widehat{\chi}_{[-a,a]}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[-a,a]}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-i\xi x} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-a}^a \cos(-\xi x) d\xi + i \int_{-a}^a \text{sen}(-\xi x) d\xi \right). \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} v = -\xi x &\Rightarrow dv = -x d\xi, \\ \xi = a &\Rightarrow v = -ax, \\ \xi = -a &\Rightarrow v = ax, \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} \widehat{\chi}_{[-a,a]}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ax}^{-ax} \frac{\cos(u)}{-x} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen}(u)}{-x} \Big|_{u=ax}^{u=-ax} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\text{sen}(-ax)}{-x} - \frac{\text{sen}(ax)}{-x} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\text{sen}(ax)}{-x} + \frac{\text{sen}(ax)}{-x} \right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{sen}(ax)}{x}. \end{aligned}$$

□

Aplicando a Transformada de Fourier na primeira equação de (10) e usando o Corolário 2, temos que

$$\widehat{u}_{tt}(\xi, t) + \xi^2 \widehat{u}(\xi, t) = 0. \quad (13)$$

A equação em (13) é uma EDO de segunda ordem com coeficientes constantes (na variável  $t$ ) e sua solução é

$$\widehat{u}(\xi, t) = c_1 \cos(\xi t) + c_2 \operatorname{sen}(\xi t). \quad (14)$$

Da segunda equação de (10),

$$\widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi), \quad (15)$$

e, de (14) e (15), segue que

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{u}(\xi, 0) = c_1. \quad (16)$$

Derivando (14), temos que

$$\widehat{u}_t(\xi, t) = -c_1 \xi \operatorname{sen}(\xi t) + c_2 \xi \cos(\xi t). \quad (17)$$

Tomando a Transformada de Fourier na terceira equação de (10),

$$\widehat{u}_t(\xi, 0) = \widehat{g}(\xi). \quad (18)$$

De (17) e (18), segue que

$$\widehat{g}(\xi) = \widehat{u}_t(\xi, 0) = c_2 \xi, \quad (19)$$

e, portanto,

$$c_2 = \frac{\widehat{g}(\xi)}{\xi}. \quad (20)$$

De (14), (16) e (20), concluímos que

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{f}(\xi) \cos(\xi t) + \frac{\widehat{g}(\xi)}{\xi} \operatorname{sen}(\xi t). \quad (21)$$

Nota-se que

$$\cos(\xi t) = \frac{\partial \operatorname{sen}(\xi t)}{\partial t} \frac{1}{\xi}, \quad (22)$$

e, desta forma, podemos reescrever (21) como

$$\widehat{u}(\xi, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \widehat{f}(\xi) \frac{\operatorname{sen}(\xi t)}{\xi} \right) + \widehat{g}(\xi) \frac{\operatorname{sen}(\xi t)}{\xi}. \quad (23)$$

Usando o Lema 5, temos que

$$\widehat{u}(\xi, t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial t} \left( \widehat{f}(\xi) \widehat{\chi}_{[-t,t]}(\xi) \right) + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \widehat{g}(\xi) \widehat{\chi}_{[-t,t]}(\xi) \quad (24)$$

Do Teorema 4 e de (24), segue que

$$\widehat{u}(\xi, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \widehat{f * \chi}_{[-t,t]} \right) (\xi) + \frac{1}{2} \left( \widehat{g * \chi}_{[-t,t]} \right) (\xi). \quad (25)$$

Aplicando a Transformada Inversa em (25), temos que

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( f * \chi_{[-t,t]} \right) (x) + \frac{1}{2} \left( g * \chi_{[-t,t]} \right) (x). \quad (26)$$

Nota-se que

$$\left( f * \chi_{[-t,t]} \right) (x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \chi_{[-t,t]}(x - y) dy, \quad (27)$$

e que

$$\begin{aligned}\chi_{[-t,t]}(x-y) &= \begin{cases} 1 & \text{se } x-y \in [-t, t] \\ 0 & \text{se } x-y \notin [-t, t] \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{se } y \in [x-t, x+t] \\ 0 & \text{se } y \notin [x-t, x+t]. \end{cases}\end{aligned}\tag{28}$$

De (27) e (28), segue que

$$(f * \chi_{[-t,t]})(x) = \int_{x-t}^{x+t} f(y) dy,\tag{29}$$

e, portanto,

$$\frac{\partial}{\partial t} (f * \chi_{[-t,t]})(x) = f(x+t) - f(x-t).\tag{30}$$

Analogamente a (29), temos que

$$(g * \chi_{[-t,t]})(x) = \int_{x-t}^{x+t} g(y) dy,\tag{31}$$

De (26), (30) e (31), concluímos que

$$u(x,t) = \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(y) dy.\tag{32}$$

Assim, podemos enunciar o seguinte teorema:

**Teorema 6.** *Sejam  $f \in C^2(\mathbb{R})$  e  $g \in C^1(\mathbb{R})$ , então a função  $u : \mathbb{R} \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$u(x,t) = \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(y) dy$$

*é uma solução do problema (10).*

## 6 Conclusões

Constatamos que a solução encontrada com a utilização da transformada de Fourier é idêntica à solução obtida através do método das curvas características. O uso da transformada de Fourier permitiu encontrar a solução para o problema estudado de maneira mais prática e menos trabalhosa que tal método. Além disso, é evidente que a transformada possibilita a resolução de outros problemas envolvendo EDPs dependentes do tempo.

## Referências

- Iório, V.M. *EDP - Um curso de Graduação*. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.  
Folland, G.B. *Real analysis: modern techniques and their applications*. Nova York: John Wiley & Sons, 2013.



## O teorema da representação de Riesz

Valdecir de Oliveira Teixeira<sup>1</sup>

Acadêmico do Curso de Matemática - CCET da Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
valdecirdeoliveirateixeira@hotmail.com

André Vicente

Professor do Curso de Matemática - CCET da Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
andre.vicente@unioeste.br

**Resumo:** No estudo de problemas envolvendo equações diferenciais parciais do ponto de vista qualitativo é frequente nos depararmos com situações em que é necessário trabalhar em espaços duais. Isto ocorre pela necessidade de ampliarmos as classes de funções envolvidas. Nesta direção torna-se extremamente importante conhecer a forma geral de elementos de espaços duais, ou seja, de operadores lineares limitados. No contexto de espaços de Hilbert o teorema que caracteriza estes elementos é chamado de Teorema da Representação de Riesz. Neste trabalho será apresentada uma demonstração de tal resultado.

**Palavras-chave:** Espaços de Banach; espaços de Hilbert; Teorema da Representação de Riesz.

### 1 Introdução

O texto será escrito no estilo *Definição, Teorema, Prova* e ocasionalmente alguma *Observação*. Usaremos uma convenção especial: é a notação “sse”, de Halmos, para “se e somente se”. Toda a teoria desenvolvida pode ser encontrada na referência (Kreyszig, 1978); a Definição 2 foi tirada da referência (White, 1973) e o resultado principal pode ser visto tanto nas referências (Brezis, 2011) como (Kreyszig, 1978). Este trabalho concentra todos os resultados necessários para provar o Teorema da Representação de Riesz, mas, nós excluimos resultados mais elementares como a definição de sequência, operação entre conjuntos, definição e propriedades de corpo e outros resultados de Análise Real e Teoria dos Espaços Métricos, que supõe-se como pré-requisitos para estudar Análise Funcional.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: na seção 2 nós apresentamos algumas notações, definições e resultados que serão usados posteriormente, e na seção 3 enunciamos e demonstramos o resultado principal.

### 2 Notações e Resultados Preliminares

Nesta seção apresentamos algumas notações e resultados que serão usados posteriormente. O desenvolvimento do conteúdo dessa seção pode ser visto com mais detalhe na referência (Kreyszig, 1978).

---

<sup>1</sup>Agradeço à Fundação Araucária pela apoio financeiro

## 2.1 Notações e definições

**Definição 1. (espaço métrico, métrica)** Um *espaço métrico* é um par  $(X, d)$ , onde  $X$  é um conjunto e  $d$  é uma função definida em  $X \times X$ , chamada de *métrica* em  $X$ , tal que para todo  $x, y$  e  $z \in X$  temos:

$$(D1) \quad d(x, y) \geq 0.$$

$$(D2) \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

$$(D3) \quad d(x, y) = d(y, x).$$

$$(D4) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad (\text{desigualdade triangular para métrica}).$$

Suponha  $(X, d)$  um espaço métrico e  $(x_n)$  uma sequência em  $X$ , convergente para um ponto  $x \in X$ . Então, se  $\varepsilon > 0$ , existe um inteiro  $N$  tal que  $d(x, x_n) < \varepsilon/2$ , se  $n > N$ . Desde que  $d(x_m, x_n) < d(x, x_n) + d(x, x_m)$ , segue-se que uma sequência convergente tem a seguinte propriedade: para qualquer  $\varepsilon > 0$ , há um inteiro  $N$  tal que

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \quad \text{se } m > N \quad \text{e } n > N.$$

**Definição 2. (sequência de Cauchy)** Uma sequência que tem a propriedade acima é chamada de *sequência de Cauchy*.

**Definição 3. (espaço métrico completo)** Se um espaço métrico tem a propriedade: “toda sequência de Cauchy converge”, então diz-se que ele é *completo*.

**Definição 4. (espaço vetorial)** Um *espaço vetorial* sobre um corpo de escalares  $K$  é um conjunto não vazio de elementos  $x, y, \dots$  (chamado *vetores*) junto com duas operações algébricas: *adição de vetores* e *multiplicação de vetores por escalares*.

A adição de vetores é definida como:

$$\begin{aligned} + : X \times X &\longrightarrow X \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

onde  $x + y$  é chamado de *soma* de  $x$  e  $y$  e goza das seguintes propriedades:

$$(A1) \quad x + y = y + x.$$

$$(A2) \quad x + (y + z) = (x + y) + z.$$

$$(A3) \quad x + 0 = x.$$

$$(A4) \quad x + (-x) = 0.$$

Onde o elemento  $0$  é chamado de *vetor zero* ou *vetor nulo* e  $-x$  é chamado de *simétrico* de  $x$ . A multiplicação de vetores por escalares é definida como:

$$\cdot : K \times X \longrightarrow X$$

$$(\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x = \alpha x$$

onde  $\alpha x$  é chamado de *produto* de  $\alpha$  e  $x$  e goza das seguintes propriedades:

$$(M1) \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x.$$

$$(M2) 1x = x.$$

$$(M3) \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

$$(M4) (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$$

$X$  é chamado de *espaço vetorial real* se  $K = \mathbb{R}$  e *espaço vetorial complexo* se  $K = \mathbb{C}$ .

**Definição 5. (norma, espaço normado, espaço de Banach)** Uma *norma* em um espaço vetorial  $X$  é uma função real ou complexa denotada por

$$\|x\|$$

(leia-se norma de  $x$ ) e que goza das seguintes propriedades:

$$(N1) \|x\| \geq 0.$$

$$(N2) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$(N3) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|.$$

$$(N4) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{desigualdade triangular para norma}).$$

onde  $x$  e  $y$  são vetores em  $X$  e  $\alpha$  é um escalar em  $K$ . Uma norma em  $X$  define uma métrica  $d$  em  $X$  a qual é dada por

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad \forall x, y \in X$$

e é chamada de *métrica induzida pela norma*. Um espaço vetorial munido de uma norma e denotado por  $(X, \|\cdot\|)$  é chamado de *espaço normado*. Um *espaço de Banach* é um espaço normado completo (completo na métrica definida pela norma).

*A norma é uma função contínua, isto é,  $x \mapsto \|x\|$  é uma função contínua de  $(X, \|\cdot\|)$ .*

**Definição 6. (convergência pela norma)** Uma sequência  $(x_n)$  em um espaço normado  $X$  é *convergente* se  $X$  contém um  $x$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Então escrevemos  $x_n \rightarrow x$  e dizemos que  $x$  é o limite de  $(x_n)$ . Uma sequência em um espaço normado é *de Cauchy* se para cada  $\varepsilon > 0$  existe um  $N$  tal que

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon \quad \forall m, n > N.$$

**Definição 7. (operador linear, espaço nulo)** Um *operador linear*  $T$  é uma função tal que

(T1) o domínio  $\mathcal{D}(T)$  de  $T$  é um espaço vetorial e a imagem  $\mathcal{R}(T)$  também é um espaço vetorial sobre o mesmo corpo de escalares,

(T2) para todo  $x, y \in \mathcal{D}(T)$  e escalar  $\alpha$ ,

$$\begin{aligned}T(x + y) &= Tx + Ty \\T(\alpha x) &= \alpha Tx.\end{aligned}$$

Por definição, o *espaço nulo* de  $T$  é o conjunto de todos os  $x \in \mathcal{D}(T)$  tal que  $Tx = 0$  e é denotado por  $\mathcal{N}(T)$ . Note que  $T0 = 0$  (tome  $\alpha = 0$  em (T2)).

**Definição 8. (operador linear limitado, norma do operador)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços normados e  $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$  um operador linear, onde  $\mathcal{D}(T) \subset X$ . O operador  $T$  é dito ser *limitado* se existe um número real  $c$  tal que para todo  $x \in \mathcal{D}(T)$ ,

$$\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X$$

A norma do lado esquerdo está definida em  $Y$  e a do lado direito em  $X$ . Quando não houver perigo de confusão, por simplicidade escrevemos  $\|Tx\| \leq c\|x\|$ . Quando  $x \neq 0$  podemos definir  $\|T\|$  como

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}. \quad (*)$$

$\|T\|$  é chamado a *norma* do operador  $T$ . Se  $\mathcal{D}(T) = \{0\}$  definimos  $\|T\| = 0$ . Observe que fazendo  $c = \|T\|$  temos a seguinte desigualdade

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|. \quad (**)$$

**Definição 9. (funcional linear)** Um *funcional linear*  $f$  é um operador linear com domínio em um espaço vetorial  $X$  e imagem no corpo de escalares  $K$  de  $X$ ; isto é

$$\begin{aligned}f : \mathcal{D}(f) &\rightarrow K \\x &\mapsto f(x)\end{aligned}$$

onde  $K = \mathbb{R}$  se  $X$  é real ou  $K = \mathbb{C}$  se  $X$  é complexo.

**Definição 10. (funcional linear limitado)** Um *funcional linear limitado*  $f$  é um operador linear limitado com imagem no corpo de escalares  $K$  do espaço normado  $X$  no qual o domínio  $\mathcal{D}(f)$  está contido. Portanto existe um número real  $c$  tal que para todo  $x \in \mathcal{D}(f)$ ,

$$|f(x)| \leq c\|x\|.$$

Além disso, a norma de  $f$  é (cf. Definição 10, (\*))

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(f) \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

ou (cf. Teorema 20)

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(f) \\ \|x\|=1}} |f(x)|.$$

Também, cf. Definição 10, (\*\*), tal que

$$|f(x)| \leq \|f\| \|x\|.$$

**Definição 11. (produto interno, espaço com produto interno, espaço de Hilbert)** Seja  $X$  um espaço vetorial e  $K$  um corpo de escalares sobre  $X$ . Um *produto interno* em  $X$  é uma função

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X &\longrightarrow K \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

onde cada par  $x$  e  $y$  são associados a um escalar chamado o produto interno de  $x$  e  $y$ . Para todos os vetores  $x, y$  e  $z$  e escalares  $\alpha$  o produto interno goza das seguintes propriedades:

$$(IP1) \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$$

$$(IP2) \quad \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \quad \text{e} \quad \langle x, \alpha y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle.$$

$$(IP3) \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}.$$

$$(IP4) \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \quad \text{e} \quad \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.$$

Um produto interno em  $X$  define uma norma em  $X$  dada por

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

e uma métrica em  $X$  dada por

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}.$$

Um espaço vetorial  $X$  com um produto interno definido em  $X$  é chamado de *espaço com produto interno*. Um *espaço de Hilbert* é um espaço com produto interno completo (completo na métrica definida pelo produto interno).

**Observação:** *Espaços com produto interno são espaços normados e espaços de Hilbert são espaços de Banach. Uma norma em um espaço com produto interno satisfaz a Regra do Paralelogramo:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

**Definição 12. (ortogonalidade)** Um elemento  $x$  de um espaço com produto interno  $X$  é dito ser ortogonal a um elemento  $y \in X$  se

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

Dizemos que  $x$  e  $y$  são ortogonais entre si e escrevemos  $x \perp y$ . Para subconjuntos  $A, B \subset X$  escrevemos  $x \perp A$  se  $x \perp a$  para todo  $a \in A$ , e  $A \perp B$  se  $a \perp b$  para todo  $a \in A$  e  $b \in B$ .

**Definição 13. (subespaço de Hilbert)** Um *subespaço*  $Y$  de um espaço de Hilbert  $H$  é definido para ser um subespaço de  $H$ , munido com um produto interno.

**Definição 14. (segmento, convexidade)** Seja  $X$  um espaço vetorial sobre um corpo de escalares  $K$ , chamamos de *segmento* o conjunto

$$S = \{z \in X; z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \quad x, y \in X \text{ e } \alpha \in K\}$$

Um subconjunto  $M$  de  $X$  é dito ser *convexo* se para cada  $x, y \in M$ ,  $S \subset M$ .

**Definição 15. (Soma direta, complemento ortogonal)** Um espaço vetorial  $X$  é dito ser a *soma direta* entre dois subespaços  $Y$  e  $Z$  de  $X$ , quando

$$X = Y \oplus Z$$

se cada  $x \in X$  tem uma única representação

$$x = y + z \quad (y \in Y, z \in Z)$$

Seja  $H$  um espaço de Hilbert e  $Y$  um subespaço de  $H$ , o *complemento ortogonal* de  $Y$  é

$$Y^\perp = \{z \in H; z \perp Y\}.$$

**Definição 16. (espaço dual)** Seja  $X$  um espaço normado. O conjunto de todos os funcionais lineares limitados definidos em  $X$  é dito ser o *espaço dual* de  $X$  e é denotado por  $X^*$ . Por simplicidade chamaremos  $X^*$  apenas de *dual*.  $X^*$  também é um espaço normado com a norma definida por

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(f) \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

## 2.2 Resultados Preliminares

Os resultados apresentados nessa seção servirão como pré-requisitos para a demonstração da Teorema da Representação de Riesz.

**Teorema 17.** *Um subespaço  $M$  de um espaço métrico completo  $X$  é completo sse o conjunto  $M$  é fechado em  $X$ .*

*Prova.* Seja  $M$  completo. Para cada  $x \in \overline{M}$  existe uma sequência  $(x_n)$  em  $M$  a qual converge para  $x$ . Desde que  $(x_n)$  é de Cauchy (cf. Definição 2) e  $M$  é completo (cf. Definição 3),  $(x_n)$  converge em  $M$ . Portanto  $x \in M$ . Como  $x \in \overline{M}$  foi arbitrário isto prova que  $M$  é fechado.

Reciprocamente, Seja  $M$  fechado e  $(x_n)$  de Cauchy em  $M$ . Então  $x_n \rightarrow x \in X$ , o qual implica que  $x \in \overline{M}$ , e  $x \in M$  desde que  $M = \overline{M}$  por hipótese. Conseqüentemente a sequência arbitrária de Cauchy converge em  $M$ , logo  $M$  é completo.  $\square$

**Teorema 18.** *Seja  $T$  um operador linear, então, o espaço nulo  $\mathcal{N}(T)$  é um espaço vetorial.*

*Prova.* Sejam  $x_1, x_2 \in \mathcal{N}(T)$  elementos quaisquer. Então  $Tx_1 = Tx_2 = 0$ . Desde que  $T$  é linear, para quaisquer escalares  $\alpha$  e  $\beta$  nós temos

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = 0$$

Isto mostra que  $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \mathcal{N}(T)$ . Portanto  $\mathcal{N}(T)$  é um espaço vetorial.  $\square$

**Teorema 19.** *Seja  $T$  um operador linear, então, o espaço nulo  $\mathcal{N}(T)$  é um espaço vetorial.*

*Prova.* Sejam  $x_1, x_2 \in \mathcal{N}(T)$  elementos quaisquer. Então  $Tx_1 = Tx_2 = 0$ . Desde que  $T$  é linear, para quaisquer escalares  $\alpha$  e  $\beta$  nós temos

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = 0$$

Isto mostra que  $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \mathcal{N}(T)$ . Portanto  $\mathcal{N}(T)$  é um espaço vetorial.  $\square$

**Teorema 20.** *Seja  $T$  um operador linear limitado. Então uma fórmula alternativa para a norma é*

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ \|x\|=1}} \|Tx\|.$$

*Prova.* Escrevemos  $\|x\| = a$  e definimos  $y = (1/a)x$ , onde  $x \neq 0$ . Então  $\|y\| = \|x\|/a = 1$ , e desde que  $T$  é linear, temos

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ x \neq 0}} \frac{1}{a} \|Tx\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ x \neq 0}} \left\| T \left( \frac{1}{a} x \right) \right\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ \|y\|=1}} \|Ty\|.$$

Trocando  $x$  por  $y$  concluímos a prova.  $\square$

**Teorema 21.** *Seja  $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$  um operador linear, onde  $\mathcal{D}(T) \subset X$  e  $X, Y$  espaços normados. Então  $T$  é contínuo sse é  $T$  limitado.*

*Prova.* Para  $T = 0$  a demonstração é trivial. Seja  $T \neq 0$ . Então  $\|T\| \neq 0$ . Vamos assumir  $T$  para ser limitado e considerar qualquer  $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ . Dado um  $\varepsilon > 0$  qualquer, desde que  $T$  é linear, para cada  $x \in \mathcal{D}(T)$  tal que

$$\|x - x_0\| < \delta \quad \text{onde} \quad \delta = \frac{\varepsilon}{\|T\|}$$

obtemos

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq \|T\| \|x - x_0\| < \|T\| \delta = \varepsilon.$$

Desde que  $x_0 \in \mathcal{D}(T)$  foi arbitrário, isto mostra que  $T$  é contínuo.

Reciprocamente, suponha  $T$  contínuo em um arbitrário  $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ . Então, dado qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$  tal que

$$\|Tx - Tx_0\| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \mathcal{D}(T) \quad \text{satisfazendo} \quad \|x - x_0\| \leq \delta. \quad (1)$$

Nós agora tomamos qualquer  $y \neq 0$  em  $\mathcal{D}(T)$  e definimos

$$x = x_0 + \frac{\delta}{\|y\|}y \quad \implies \quad x - x_0 = \frac{\delta}{\|y\|}y.$$

Conseqüentemente  $\|x - x_0\| = \delta$ , de modo que podemos usar (1). Desde que  $T$  é linear, nós temos

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| = \left\| T \left( \frac{\delta}{\|y\|}y \right) \right\| = \frac{\delta}{\|y\|} \|Ty\|.$$

e (1) implica

$$\frac{\delta}{\|y\|} \|Ty\| \leq \varepsilon. \quad \text{Portanto} \quad \|Ty\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \|y\|.$$

E isto pode ser escrito como  $\|Ty\| \leq c\|y\|$ , onde  $c = \varepsilon/\delta$ . Logo  $T$  é limitado. □

**Corolário 22.** *Seja  $T$  um operador linear limitado. Então:*

(a)  $x_n \rightarrow x$  (onde  $x_n, x \in \mathcal{D}(T)$ ) implica  $Tx_n \rightarrow Tx$ .

(b) O espaço nulo  $\mathcal{N}(T)$  é fechado.

*Prova.* (a) Segue do Teorema 21, quando  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leq \|T\| \|x_n - x\| \rightarrow 0.$$

(b) Para cada  $x \in \overline{\mathcal{N}(T)}$  existe uma seqüência  $x_n$  em  $\mathcal{N}(T)$  tal que  $x_n \rightarrow x$ . Conseqüentemente,  $Tx_n \rightarrow Tx$  pela parte (a) deste Corolário. Também,  $Tx = 0$  desde que  $Tx_n = 0$ , de modo que  $x \in \mathcal{N}(T)$ . Desde que  $x \in \overline{\mathcal{N}(T)}$  foi arbitrário,  $\mathcal{N}(T)$  é fechado. □

**Teorema 23.** *Um funcional linear  $f$  com domínio  $\mathcal{D}(f)$  em um espaço normado é contínuo sse é limitado.*

*Prova.* Conforme Teorema 21. □

**Teorema 24.** *Um produto interno e sua correspondente norma satisfazem:*

(a) *Desigualdade de Schwarz:*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

(b) *Desigualdade Triângular:*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

*Prova.* (a) Se  $y = 0$ , então  $\langle x, 0 \rangle = 0$ . Seja  $y \neq 0$ . Para cada escalar  $\alpha$  nós temos

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x - \alpha y\|^2 &= \langle x - \alpha y, x - \alpha y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - \bar{\alpha} \langle x, y \rangle - \alpha [\langle y, x \rangle - \bar{\alpha} \langle y, y \rangle] \end{aligned}$$

Se escolhermos  $\bar{\alpha} = \langle y, x \rangle / \langle y, y \rangle$  e substituindo na expressão acima temos

$$0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle x, y \rangle = \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2}$$

onde  $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$ . Multiplicando por  $\|y\|^2$ , transferindo o último termo para a esquerda e tirando a raiz quadrada, nós obtemos a Desigualdade de Schwarz. A igualdade é estabelecida sse  $y = 0$  ou  $\|x - \alpha y\|^2 = 0$ , donde  $x - \alpha y = 0$ , de modo que  $x = \alpha y$ .

(b) Observe que

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle &= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Como a função raiz quadrada é crescente, obtemos a *desigualdade triangular para a norma*. A igualdade ocorre sse

$$\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle = 2\|x\|\|y\|.$$

□

**Teorema 25.** *Seja  $X$  um espaço com produto interno e  $M \neq \emptyset$  um subconjunto convexo o qual é completo (na métrica induzida pelo produto interno). Então para cada  $x \in X$  dado existe um único  $y \in M$  tal que*

$$\delta = \inf_{\tilde{y} \in M} \|x - \tilde{y}\| = \|x - y\|.$$

*Prova.* (a) *Existência:* Pela definição de ínfimo existe uma sequência  $(y_n)$  em  $M$  tal que

$$\delta_n \longrightarrow \delta \quad \text{onde} \quad \delta_n = \|x - y_n\|.$$

Escrevendo  $y_n - x = v_n$ , nós temos  $\|v_n\| = \delta_n$  e

$$\|v_n + v_m\| = \|y_n + y_m - 2x\| = 2 \left\| \frac{1}{2}(y_n + y_m) - x \right\| \geq 2\delta$$

porque  $M$  é convexo, de modo que  $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in M$ . Temos que  $y_n - y_m = v_n - v_m$ , pela Regra do Paralelogramo,

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 = \|v_n - v_m\|^2 &= -\|v_n + v_m\|^2 + 2(\|v_n\|^2 + \|v_m\|^2) \\ &\leq -(2\delta)^2 + 2(\delta_n^2 + \delta_m^2), \end{aligned}$$

e portanto  $(y_n)$  é de Cauchy. Desde que  $M$  é completo,  $(y_n)$  converge,  $y_n \longrightarrow y \in M$  e nós temos que  $\|x - y\| \geq \delta$ . Também

$$\|x - y\| \leq \|x - y_n\| + \|y_n - y\| = \delta_n + \|y_n - y\| \longrightarrow \delta.$$

Logo  $\|x - y\| = \delta$ .

(b) *Unicidade*: Sejam  $y, y_0 \in M$  ambos satisfazendo

$$\|x - y\| = \delta \quad \text{e} \quad \|x - y_0\| = \delta.$$

Pela Regra do Paralelogramo,

$$\begin{aligned} \|y - y_0\|^2 &= \|(y - x) - (y_0 - x)\|^2 \\ &= 2\|y - x\|^2 + 2\|y_0 - x\|^2 - \|(y - x) + (y_0 - x)\|^2 \\ &= 2\delta^2 + 2\delta^2 - 2^2 \left\| \frac{1}{2}(y + y_0) - x \right\|^2 \\ &\leq 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta \\ &= 0 \end{aligned}$$

Pois,  $\frac{1}{2}(y + y_0) \in M$ , de modo que

$$\left\| \frac{1}{2}(y + y_0) - x \right\| \geq \delta.$$

Como  $\|y - y_0\| \geq \delta$ , então  $y = y_0$ . □

**Teorema 26.** *Seja  $Y$  um subespaço fechado qualquer de um espaço de Hilbert  $H$ . Então*

$$H = Y \oplus Z \quad (Z = Y^\perp)$$

*Prova.* Desde que  $H$  é completo e  $Y$  é fechado,  $Y$  é completo (cf. Teorema 17). Desde que  $Y$  é convexo, o Teorema 25 implica que para cada  $x \in H$  existe um  $y \in Y$  tal que

$$x = y + z \quad (z \in Z = Y^\perp)$$

Para provar a unicidade, assumimos que

$$x = y + z = y_1 + z_1$$

onde  $y, y_1 \in Y$  e  $z, z_1 \in Z$ . Então  $y - y_1 = z_1 - z$ . Desde que  $y - y_1 \in Y$  enquanto que  $z_1 - z \in Z = Y^\perp$ , nós vemos que  $y - y_1 \in Y \cap Y^\perp = \{0\}$ . Isto implica  $y = y_1$  e  $z = z_1$ . □

### 3 Resultado Principal

Nesta seção apresentamos uma prova do Teorema da Representação de Riesz. O desenvolvimento do conteúdo dessa seção pode ser visto com mais detalhes nas referências (Brezis, 1978) e (Kreyszig, 1978).

**Teorema 27 (Teorema da Representação de Riesz).** *Cada funcional linear limitado  $f$  em um espaço de Hilbert  $H$  pode ser representado como um produto interno, da forma*

$$f(x) = \langle x, z \rangle \quad (1)$$

onde  $z$  depende de  $f$ , é unicamente determinado por  $f$  e tem norma

$$\|z\|_H = \|f\|_{H^*} \quad (2)$$

*Prova.* Considere o operador  $T : H \rightarrow H^*$  definido como: dado qualquer  $x \in H$ , a aplicação  $x \mapsto \langle x, z \rangle$  é um funcional linear limitado e portanto contínuo em  $H$  (cf. Teorema 23). Isto define um elemento em  $H^*$ , o qual denotamos por  $Tz = f$ , de modo que

$$Tz(x) = f(x) = \langle x, z \rangle \quad (\forall x \in H)$$

Assim  $z$  pode ser determinado pela aplicação

$$\begin{aligned} T^{-1} : H^* &\rightarrow H \\ f &\mapsto T^{-1}f = z \end{aligned}$$

(a)  $f$  tem uma representação como (1): Se  $f = 0$ , então (1) e (2) é assegurado se tomarmos  $z = 0$ . Seja  $f \neq 0$ . Observe que  $z \neq 0$ , caso contrário  $f = 0$ ;  $\langle x, z \rangle = 0$  para todo  $x$  para o qual  $f(x) = 0$ , ou seja, para todo  $x \in \mathcal{N}(f)$ , e portanto  $z \perp \mathcal{N}(f)$ . Isto sugere que consideremos o  $\mathcal{N}(f)$  e seu complemento ortogonal  $\mathcal{N}(f)^\perp$ .

$\mathcal{N}(f)$  é um espaço vetorial (cf. Teorema 18) e é fechado (cf. Corolário 22). Portanto,  $f \neq 0$  implica  $\mathcal{N}(f) \neq H$ , de modo que  $\mathcal{N}(f)^\perp \neq 0$  (cf. Teorema 26). Conseqüentemente  $\mathcal{N}(f)^\perp \neq 0$  contém um  $z_0 \neq 0$ . Definimos

$$v = f(x)z_0 - f(z_0)x$$

onde  $x \in H$  é tomado arbitrariamente. Aplicando  $f$ , nós obtemos

$$\begin{aligned} f(v) &= f(f(x)z_0 - f(z_0)x) \\ &= \langle f(x)z_0 - f(z_0)x, z \rangle \\ &= \langle f(x)z_0, z \rangle - \langle f(z_0)x, z \rangle \\ &= f(x)\langle z_0, z \rangle - f(z_0)\langle x, z \rangle \\ &= f(x)f(z_0) - f(z_0)f(x) \\ &= f(x)[f(z_0) - f(z_0)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Isto mostra que  $v \in \mathcal{N}(f)$ . Desde que  $z_0 \perp \mathcal{N}(f)$ , nós temos

$$\begin{aligned} 0 = \langle v, z_0 \rangle &= \langle f(x)z_0 - f(z_0)x, z_0 \rangle \\ &= \langle f(x)z_0, z_0 \rangle - \langle f(z_0)x, z_0 \rangle \\ &= f(x)\langle z_0, z_0 \rangle - f(z_0)\langle x, z_0 \rangle \end{aligned}$$

Observando que  $\langle z_0, z_0 \rangle = \|z_0\|^2 \neq 0$ , nós podemos escrever  $f(x)$  como

$$f(x) = \frac{f(z_0)}{\langle z_0, z_0 \rangle} \langle x, z_0 \rangle.$$

Isto pode ser escrito na forma (1), onde

$$z = \frac{\overline{f(z_0)}}{\langle z_0, z_0 \rangle} z_0.$$

Desde que  $x \in H$  foi arbitrário (1) está provado.

(b)  $z$  em (1) é único: Suponha que para todo  $x \in H$

$$f(x) = \langle x, z_1 \rangle = \langle x, z_2 \rangle.$$

Então  $\langle x, z_1 - z_2 \rangle = 0$  para todo  $x$ . Escolhendo em particular  $x = z_1 - z_2$ , nós temos

$$\langle x, z_1 - z_2 \rangle = \langle z_1 - z_2, z_1 - z_2 \rangle = \|z_1 - z_2\|^2 = 0.$$

Portanto  $z_1 - z_2 = 0$ , de modo que  $z_1 = z_2$ .

(c) (2) é satisfeito: Se  $f = 0$ , então  $z = 0$  e (2) está provado. Seja  $f \neq 0$ . Então  $z \neq 0$ . De (1) com  $x = z$  e da Definição 13, nós obtemos

$$\|z\|^2 = \langle z, z \rangle = f(z) \leq \|f\| \|z\|.$$

Dividindo por  $\|z\| \neq 0$  temos  $\|z\| \leq \|f\|$ . De (1) e da Desigualdade de Schwarz (cf. Teorema 24) nós vemos que

$$|f(x)| = |\langle x, z \rangle| \leq \|x\| \|z\|.$$

Isto implica

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, z \rangle| \leq \|z\|.$$

□

## Referências

- Brezis, Haim; *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer Science+Business Media, LLC 2011.
- Kreyszig, Erwin; *Introductory Functional Analysis with Applications*, by John Wiley & Sons. Inc., 1978.
- White, A. J.; *Análise Real: uma Introdução*, tradução, Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1973.

## Otimização topológica em vigas pelo critério da otimalidade

Renato Massamitsu Zama Inomata<sup>1</sup>  
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
renato.inomata@gmail.com

Paulo Domingos Conejo  
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
pconejo33@gmail.com

Paula Yumi Takeda  
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
pytakeda@gmail.com

Simone Aparecida Miloca  
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
simone.miloca@unioeste.br

**Resumo:** Problemas de otimização são bastante comuns em diversas áreas do conhecimento. Em particular, a otimização topológica fornece concepções estruturais à engenharia, sendo elas baseadas em alguma característica a ser otimizada e suas respectivas restrições físicas e/ou construtivas. Neste trabalho será abordado o problema em que se obtém a estrutura mais rígida sujeita a uma certa quantidade de material a ser utilizado. O problema foi modelado com a utilização do método dos elementos finitos (MEF) e, para resolver os problemas de otimização, foi utilizada uma metodologia heurística conhecida como Critério da Otimalidade. Foram variados alguns parâmetros de entrada para o problema a fim de comparar os seus efeitos na topologia ótima obtida.

**Palavras-chave:** otimização topológica; critério da otimalidade; elementos finitos.

### 1 Introdução

A Otimização é a área da Programação Matemática que consiste em minimizar ou maximizar uma determinada função,  $f$ , denominada função objetivo, sujeita a determinadas condições,  $\Gamma$ , denominadas restrições (RIBEIRO; KARAS, 2013).

Um problema de otimização é usualmente escrito na forma

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeito a} && x \in \Gamma \end{aligned} \tag{1}$$

com  $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0, g(x) \leq 0\}$ ,  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$  e  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funções diferenciáveis. Quando o conjunto  $\Gamma$  é o espaço  $n$ -dimensional, o problema de otimização é dito

<sup>1</sup>Agradecimentos à CNPq por oferecer apoio financeiro

irrestrito. Quando a função objetivo ou alguma das funções que definem o conjunto de restrições  $\Gamma$  for não linear, dizemos que o problema (1) é de Otimização não Linear. Ao contrário é de Otimização Linear.

A Otimização Topológica é ramo da Otimização que trata de projetar a topologia ótima de uma estrutura (BENDSØE et al., 2004). As primeiras otimizações topológicas, remontam estudos de Michell (1994), que estudou a minimização de volume de uma estrutura formada por barras.

O método para a escolha topológica, essencialmente, consiste em distribuir material no interior de um domínio, minimizando um funcional sob restrições pré-estabelecidas. Assim, a otimização topológica está voltada para a obtenção da estrutura mais rígida possível, sujeita a restrições, como um volume máximo de material. A Otimização Topológica combina essencialmente métodos de otimização com um método de Análise Numérica. Considerando que as equações de equilíbrio são envolvidas, utilizaremos o Método dos Elementos Finitos.

Neste trabalho foi utilizado o Critério da Otimalidade para resolver os problemas de otimização. Embora trate-se de um método heurístico, ou seja, sem prova de convergência, Andreassen et al. (2004) e Sigmund (2001) mostraram em seus trabalhos que o método gera bons resultados para o problema de interesse.

## 2 Modelagem do problema

### 2.1 Método SIMP

Discretizado um domínio de projeto  $\Omega$ , este será representado por uma malha de elementos discretos, onde um elemento possui o valor de 1 caso faça parte da estrutura ótima ou 0 caso contrário. Dessa maneira, a variável para o problema (1) representa a densidade dos elementos.

Contudo, problemas com variáveis contínuas são resolvidos mais facilmente, visto que, devido a suavidade das funções é possível deduzir informações em uma vizinhança de uma variável (WRIGHT; NOCEDAL, 1999). Portanto, adotamos valores de densidade  $x_i \in [0, 1]$ , onde  $i$  representa cada um dos elementos pertencentes a  $\Omega$ .

Embora seja interessante trabalhar com variáveis contínuas, segundo Senne (2009), essas não representam um significado físico adequado, visto que não serão utilizados diferentes materiais para a estrutura. Assim, para que seja possível aproximá-lo de um problema discreto, o método *Solid Isotropic Material with Penalization* foi utilizado, sendo que cada uma das densidades é elevada a um fator de penalização  $p$ , a fim de tornar as densidades mais próximas de 0 ou 1. A Figura 1 ilustra os valores obtidos com diferentes fatores de penalização.

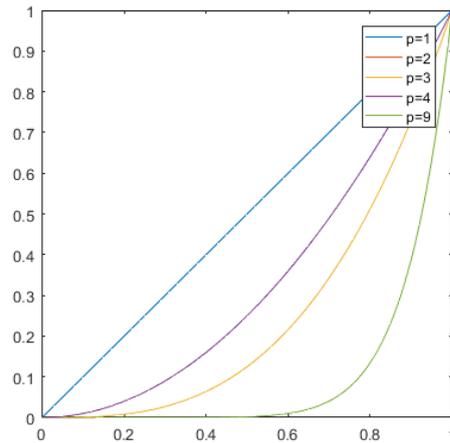


Figura 1: Efeito do aumento do fator de penalização  $p$  nas densidades  $x$

Sigmund (1994) explica que conforme o aumento dos valores de  $p$  mais distintas são as áreas vazias e sólidas (há menor presença de densidades intermediárias), sendo que para  $p \approx 3$  as soluções obtidas consistem quase que inteiramente de regiões ou sólidas ou vazias.

## 2.2 Formulação dos elementos

Quando se utiliza o Método dos Elementos Finitos, as características de uma estrutura como a sua rigidez ou deformações quando sujeitas a cargas são fatores que dependem diretamente da modelagem dos elementos que a compõem. Os elementos utilizados neste trabalho foram quadriláteros de área unitária, ou seja, placas com quatro nós e de lados iguais e unitários.

### Matriz de rigidez de um elemento

Para cada elemento é associado uma matriz de rigidez  $k_e$  simétrica e positiva definida. As dimensões dessa matriz correspondem ao número de deslocabilidades do elemento, ou seja, neste caso a matriz possui dimensões  $8 \times 8$  (2 deslocabilidades/nó  $\times$  4 nós). A rigidez de um elemento é obtida através da fórmula do trabalho interno, sendo que a demonstração pode ser encontrada em Chandrupatla et al. (2002).

### Matriz de rigidez global

O conceito de matriz de rigidez pode ser expandido para a malha de elementos, através da matriz de rigidez global. Nela teremos uma matriz  $K \in \mathbb{R}^{2n_n \times 2n_n}$ , onde  $n_n$  é o número de nós da malha.

Seja  $n_{el}$  o número total de elementos da malha, a rigidez global pode ser obtida através de um somatório das rigidezes  $K_i$  dos  $i = 1, \dots, n_{el}$  elementos. Para obter  $K_i$ , é utilizada uma

matriz  $P_i \in \mathbb{R}^{2n_n \times 8}$  formada pelas colunas da matriz identidade  $I \in \mathbb{R}^{2n_n \times 2n_n}$ , assim

$$K_i = P_i k_e P_i^T, \quad i = 1, \dots, n_{el}. \quad (2)$$

A matriz  $K_i$  é uma superposição das rigidezes  $k_e$ , porém disposta em uma matriz  $2n_n \times 2n_n$ , de maneira que os graus de liberdade de  $k_e$  estejam relacionados aos seus respectivos graus de liberdade obtidos pela numeração da rigidez global  $K$ .

A condição de equilíbrio estático para a estrutura (também conhecida como restrição tecnológica) é dada por

$$KU = F \quad (3)$$

em que o vetor  $U \in \mathbb{R}^{2n_n}$  é o *vetor global de deslocamentos*, enquanto que  $F \in \mathbb{R}^{2n_n}$  é o *vetor global de forças nodais*.

### 2.3 Formulação do problema

O problema de otimização topológica que temos interesse é o de minimizar a flexibilidade, que é equivalente a maximizar a rigidez, sujeita a uma restrição de quantidade máxima de material a ser utilizado pela estrutura. Ou seja,

$$\begin{aligned} \min & \text{ Flexibilidade} \\ \text{s.a.} & \text{ Volume da estrutura} \leq \text{Volume máximo.} \end{aligned} \quad (4)$$

Seja  $x$  o vetor das densidades dos elementos, a matriz de rigidez global,  $K \equiv K(x)$  é

$$K = \sum_{i=1}^{n_{el}} x_i^p K_i, \quad (5)$$

com  $K_i$  dado por (2) e  $p$  a penalidade associada ao método SIMP.

O vetor global de deslocamentos  $U \equiv U(x)$ , é obtido por (3) e (5). A flexibilidade da estrutura é dada pelo produto entre o vetor global de forças nodais  $F$  e o vetor  $U$ . Seja  $n_{el}$  o número de elementos da estrutura, assim, de (3), a função objetivo,  $f_o : \mathbb{R}^{n_{el}} \rightarrow \mathbb{R}$ , é dada por

$$f_o(x) = F^T U = U^T K U. \quad (6)$$

O domínio de projeto é uma viga retangular, com apoios na lateral que apresenta a carga, e um apoio na extremidade oposta. Este problema surge de uma simplificação por simetria de uma viga isostática e bi-apoiada, conforme Figura 2. Os locais que apresentam apoios terão deslocamentos nulos.

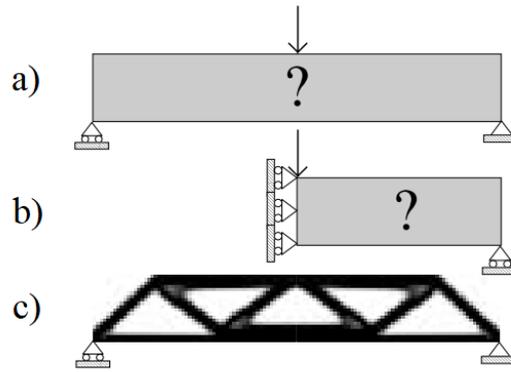


Figura 2: Otimização topológica de uma viga bi-apoiada. a) Domínio de projeto completo, b) domínio de projeto simplificado, c) solução obtida (SIGMUND, 2001)

Sabendo que todos os elementos possuem a mesma dimensão, assim, seja  $v_f$  a fração de volume,  $V_{max}$  será o volume máximo da estrutura tal que

$$v_f = V_{max}/n_{el}. \quad (7)$$

Seja  $V \equiv V(x)$ , como  $x \in [0, 1]$ , temos

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \sum_{i=1}^{n_{el}} U^T K U = \sum_{i=1}^{n_{el}} x_i^p (u_i^T k_e u_i) \\ \text{s.a.} \quad & V = \sum_{i=1}^{n_{el}} x_i \leq (n_{el})(v_f) \\ & 0 < x_{\min} \leq x \leq 1, \end{aligned} \quad (8)$$

onde  $u_i$  é o vetor de deslocamentos nodais do elemento  $i$ .

É importante que  $x_{\min}$  seja superior a 0 pois o problema, que é contínuo, se aproximaria de um problema discreto, gerando uma instabilidade numérica devido a grande variação das densidades dos elementos (SENNE, 2009).

Para realizar a otimização do problema (8) é necessário conhecer os gradientes da função objetivo e das funções de restrição do problema a fim de utilizar o Critério da Otimalidade.

A derivada da função objetivo é obtida derivando, com relação a  $x_i$ , a equação da condição de equilíbrio dada por (3). Assim

$$K U = F \Rightarrow \frac{\partial K}{\partial x_i} U + K \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0, \quad (9)$$

visto que  $\partial F / \partial x_i = 0$ , pois o carregamento não depende da densidade. Além disso, derivando (5),

$$\frac{\partial K}{\partial x_i} = p(x_i)^{p-1} K. \quad (10)$$

Utilizando (6), (9) e (10), temos

$$\frac{\partial f_o(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial U^T}{\partial x_i} K U + U^T \frac{\partial K}{\partial x_i} U + U^T K \frac{\partial U}{\partial x_i} = -p(x_i)^{p-1} U^T K U.$$

## 2.4 Tabuleiro de xadrez

Um dos problemas recorrentes em se tratando de otimização topológica é o “tabuleiro de xadrez”. Sigmund (1994) o define como “região com elementos vazios e sólidos alternados, dispostos em forma de um tabuleiro de xadrez”, como demonstrado na Figura 3 a seguir.

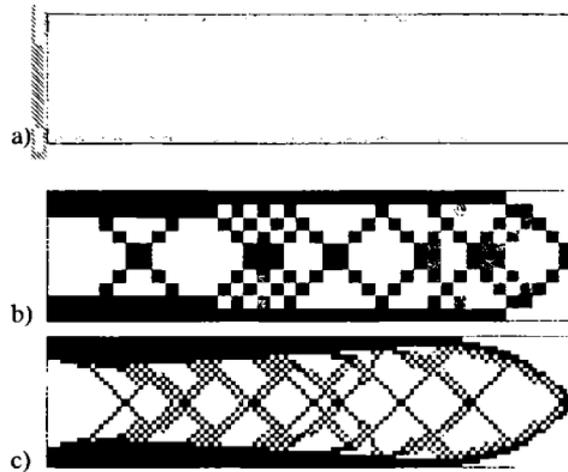


Figura 3: O tabuleiro de xadrez na otimização de uma viga. a) Domínio de projeto, b) solução do problema para uma discretização com 400 elementos, c) solução para uma discretização com 6400 elementos (BENDSØE, 2004)

Essa “porosidade” não deve ser entendida como uma estrutura ótima, sendo que ela está diretamente relacionada com instabilidades numéricas devido a modelagem dos elementos. Jog e Haber (1996) mencionam que elementos de ordem 4, ou seja que apresentam 4 nós, apresentavam o problema do tabuleiro de xadrez, contudo, os autores não encontraram o surgimento desse comportamento com elementos de ordem 8 ou 9.

Sigmund (1994) comenta que existem diferentes maneiras de se contornar o problema do tabuleiro de xadrez. Em seu trabalho, o autor sugere a utilização de métodos de processamento de imagens para redução de ruídos, caracterizando o *filtro espacial*.

Filtros são operadores matemáticos, mais especificamente um produto de convolução entre uma função e a função das densidades (BOURDIN, 2011). Eles atuam em uma vizinhança de um elemento, alterando suas características, como o vetor gradiente da função objetivo, ou as densidades dos elementos. A Figura 4 a seguir demonstra o raio de atuação do filtro  $r_{\min}$ .

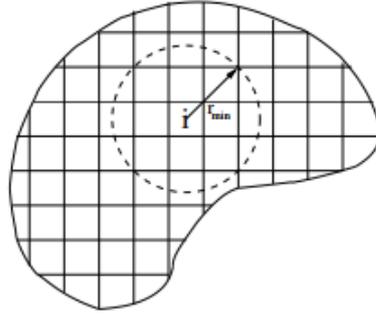


Figura 4: Ilustração da vizinhança de um elemento finito  $i$  (SENNE, 2009)

### O filtro do vetor gradiente da função objetivo

Andreassen et al. (2011) propõe um filtro baseado na média ponderada do vetor gradiente da função objetivo em uma vizinhança para cada elemento da estrutura. Seja  $i = 1, \dots, n_{el}$ ,  $f$  a função objetivo,  $B_i$  uma bola de raio  $r_{\min}$  centrada no centro do elemento  $i$ , os componentes do gradiente,  $\partial f / \partial x_i$ , serão substituídos por

$$\frac{\widehat{\partial f}}{\partial x_i} = \frac{1}{x_i \sum_{j \in B_i} \widehat{H}_{ij}} \sum_{j \in B_i} \widehat{H}_{ij} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad i = 1, \dots, n_{el},$$

com

$$\widehat{H}_{ij} = \begin{cases} r_{\min} - s_{ij}, & \text{se } j \in B_i, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (11)$$

um fator de peso que varia conforme  $s_{ij}$ , que é a distância euclidiana entre os elementos  $i$  e  $j$ . Quanto mais próximo um elemento  $j$  está de seu elemento central  $i$ , maior é a atuação do filtro. É interessante notar que  $\widehat{H}_{ij}$  é um parâmetro que depende exclusivamente das posições relativas entre os elementos, sendo, portanto, constante ao longo das iterações.

### O filtro da média ponderada das densidades

Este filtro é análogo ao anterior e modifica a densidade de um elemento central  $e$  pela média ponderada das densidades dos elementos  $i$  dentro de uma vizinhança  $B_e$  com raio  $r_{\min}$ . As novas densidades são dadas por

$$\widehat{x}_e = \frac{1}{\sum_{i \in B_e} \widehat{H}_{ei}} \sum_{i \in B_e} \widehat{H}_{ei} x_i.$$

Vale ressaltar que o gradiente das funções objetivo e das restrições também são modificados, e podem ser obtidos aplicando a regra da cadeia. Portanto

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x_j} = \sum_{e \in B_j} \frac{\partial \zeta}{\partial \widehat{x}_e} \frac{\partial \widehat{x}_e}{\partial x_j} = \sum_{e \in B_j} \frac{1}{\sum_{i \in B_e} \widehat{H}_{ei}} \widehat{H}_{ej} \frac{\partial \zeta}{\partial \widehat{x}_e},$$

na qual  $\zeta$  é a função que representa ou a função objetivo ou a restrição de volume e  $\widehat{H}_{ei}$  obtido através de (11).

### 3 Critério da otimalidade

Dentre os diversos métodos de otimização existentes, neste trabalho utilizamos o Critério da Otimalidade, que é um método heurístico e de fácil implementação. Segundo Bendsøe et al. (1995), o método gera bons resultados para o problema apresentado.

Seja  $k$  o número da iteração atual, o esquema para a otimização do problema (8) é dado por

$$x_i^{k+1} = \begin{cases} \max(x_{\min}, x_i^k - m) & \text{se } x_i^k B_i^\eta \leq \max(x_{\min}, x_i^k - m), \\ x_i^k B_i^\eta & \text{se } \max(x_{\min}, x_i^k - m) < x_i^k B_i^\eta < \min(1, x_i^k + m), \\ \min(1, x_i^k + m) & \text{se } \min(1, x_i^k + m) \leq x_i^k B_i^\eta, \end{cases} \quad (12)$$

no qual  $m$  é um passo positivo limite,  $\eta = 1/2$  é um coeficiente de amortecimento numérico e  $B_i$  é obtido pelo critério da otimalidade

$$B_i = \frac{-\frac{\partial f_o}{\partial x_i}}{\lambda \frac{\partial V}{\partial x_i}}, \quad (13)$$

de maneira que  $\lambda$  é um multiplicador Lagrangiano obtido através de um algoritmo de bi-seccionamento.

### 4 O algoritmo para o Problema de Otimização Topológica

O ambiente para a implementação do problema foi a versão de estudante do software *MATLAB*. A Figura 5 representa um fluxograma com respeito as etapas do algoritmo utilizado.



Figura 5: Fluxograma do algoritmo

Os dados iniciais fomentados ao algoritmo são: as dimensões do domínio de projeto (em  $x$  e  $y$ );  $v_f$  que é a fração de volume que servirá como restrição de material à estrutura; a penalidade  $p$  do método SIMP; o raio  $r_{\min}$  para a atuação do filtro;  $E$  que é o módulo de rigidez do material, e  $\nu$  o coeficiente de Poisson, que varia de 0 a 1 são os parâmetros envolvidos para o cálculo da matriz de rigidez  $k_e$  de um elemento.

Na inicialização são geradas as densidades iniciais, que possuirão como valor inicial  $v_f$ . Além disso, é gerado também a matriz de rigidez  $k_e$  de um elemento, e as constantes  $\hat{H}_{ij}$ , dadas por (11).

De posse desses valores o algoritmo inicia a análise dos elementos finitos, obtendo a matriz de rigidez  $K$  dada por (5), e os deslocamentos  $U$  obtidos usando a restrição tecnológica dada por (3). Em seguida, são obtidos os valores da função objetivo e de seu gradiente, etapa chamada de análise de sensibilidades. O filtro é então aplicado e finalmente realizamos a etapa de otimização, atualizando assim as variáveis. O processo é repetido até que o critério de parada seja atingido. Nesta implementação, o algoritmo irá convergir caso alcance 500 iterações ou a variação das variáveis seja inferior a 1%, ou seja

$$\|x^k - x^{k+1}\|_{\infty} < 0.01.$$

## 5 Testes numéricos

Os testes numéricos envolveram alterações quanto ao filtro utilizado e o raio  $r_{\min}$  de atuação do filtro. Os dados iniciais do problema foram: dimensões do domínio de projeto de  $120 \times 40$ ; a penalidade associada ao método SIMP  $p = 3$ ;  $V_{max}$  dado por (7) com  $v_f = 0.5$ ;  $E = 1$  e  $\nu = 0.3$ ; e o raio de atuação do filtro foi de 2.5% e 5% do maior lado do domínio de projeto, ou seja,  $r_{\min} = 3$  e  $r_{\min} = 6$ , respectivamente. A seguir estão as topologias obtidas e seus respectivos parâmetros iniciais.



Figura 6: Domínio de projeto  $120 \times 40$ , sem filtro



Figura 7: Domínio de projeto  $120 \times 40$ , filtro do vetor gradiente da função objetivo,  $r_{\min} = 3$



Figura 8: Domínio de projeto  $120 \times 40$ , filtro da média ponderada das densidades,  $r_{\min} = 3$

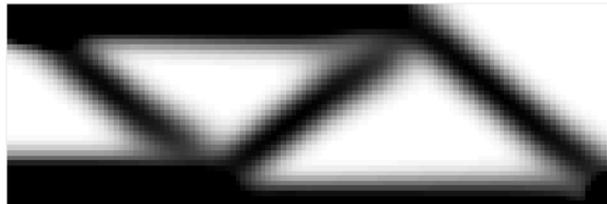


Figura 9: Domínio de projeto  $120 \times 40$ , filtro do vetor gradiente da função objetivo,  $r_{\min} = 6$

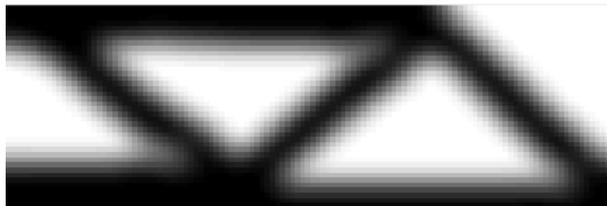


Figura 10: Domínio de projeto  $120 \times 40$ , filtro da média ponderada das densidades,  $r_{\min} = 6$

## 6 Conclusão

Neste trabalho foi apresentado a modelagem matemática de um problema de otimização topológica, bem como diferentes topologias obtidas pela variação dos parâmetros de entrada.

Podemos notar pelas Figuras 9 e 10 que um aumento no raio  $r_{\min}$  permite obter topologias semelhantes para ambos os filtros, embora essas apresentem mais densidades intermediárias que as demais (as densidades intermediárias são observadas pelo borrão nas topologias). A formação de barras extras nas Figuras 7 e 8 é devido ao menor raio da atuação do filtro, sendo que o filtro da média ponderada das densidades apresentou um número maior desses elementos.

Ao contrário das demais, para a Figura 6 o algoritmo atingiu o número máximo de iterações. Uma das possíveis causas poderia ser o método heurístico de otimização utilizado para resolver (8).

## Agradecimentos

Agradecimentos à CNPq por oferecer apoio financeiro ao discente durante seu projeto de Iniciação Científica.

## Referências

- ANDREASSEN, E. et al. *Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code*. Structural and Multidisciplinary Optimization, v. 43, n. 1, p. 1-16, 2011.
- BENDSØE, M. P. *Optimization of structural topology, shape, and material*. Berlin etc: Springer, 1995.
- BENDSØE, M. P. et al. *Topology optimization by distribution of isotropic material*. Springer Berlin Heidelberg, 2004.
- BOURDIN, B. *Filters in topology optimization*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 50, n. 9, p. 2143-2158, 2001.
- CHANDRUPATLA, T. R. et al. *Introduction to finite elements in engineering*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.
- JOG, C. S.; HABER, R. B. *Stability of finite element models for distributed-parameter optimization and topology design*. Computer methods in applied mechanics and engineering, v. 130, n. 3-4, p. 203-226, 1996.
- MICHELL, A. G. M. *The limits of economy of material in framed structures*. Philosophical Magazine, 8(6):589-597, 1904.
- RIBEIRO, A. A.; KARAS E. W. *Otimização Contínua Aspectos Teóricos e Computacionais*. Cengage Learning, São Paulo, 2013.
- SENNE, T. A. *Otimização topológica de mecanismos flexíveis*. Dissertação de Mestrado, UNICAMP, 2009.
- SIGMUND, O. *Design of material structures using topology optimization*. Tese de Doutorado. Technical University of Denmark, 1994.
- SIGMUND, O. *A 99 line topology optimization code written in Matlab*. Structural and multidisciplinary optimization, v. 21, n. 2, p. 120-127, 2001.
- WRIGHT, S. J.; NOCEDAL, J. *Numerical optimization*. Springer Science, v. 35, n. 67-68, p. 7, 1999.



## Obstáculos didáticos e epistemológicos no ensino da multiplicação e divisão no segundo ciclo do ensino fundamental

Lucas Campos de Araújo  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste - Campus Cascavel  
kopier\_business@hotmail.com

Matheus A. A. Anzolin  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste - Campus Cascavel  
matheusalves2107@hotmail.com

**Resumo:** Este artigo objetiva-se no intuito de explicitar alguns obstáculos epistemológicos e didáticos vivenciados nas instituições de ensino, nesta era tecnológica, com relação ao segundo ciclo do ensino fundamental especificamente na disciplina de Matemática. Para tal faz-se um estudo a respeito das transformações nas metodologias de ensino e também sobre o que os parâmetros curriculares esperam que um aluno do segundo ciclo do ensino fundamental compreenda em relação ao conteúdo ministrado. Assim são expostos problemas muito corriqueiros no trabalho da multiplicação e divisão sobre a perspectiva dos Campos Conceituais de Vergnaud, diferenciando o papel do professor de matemática e do pesquisador matemático. Além de explicitar algumas alternativas para transpor os obstáculos didáticos e epistemológicos no ensino.

**Palavras-chave:** Divisão e Multiplicação; Obstáculos didáticos e epistemológicos; Papel do professor.

### 1 Introdução

No decorrer da história o homem foi capaz de se adaptar às mudanças climáticas, evoluindo progressivamente em aspectos biológicos e psicológicos, além de criar instrumentos em busca de facilitar o seu cotidiano e necessidades. Pode-se citar a criação e utilização da linguagem, a qual nos primórdios da sociedade começou a se desenvolver com os primeiros murmúros entre os indivíduos. Este surgimento ocorreu principalmente pela necessidade da comunicação verbal nos grupos existentes e, conseqüentemente, possibilitou a produção das mais diversas formas de escrita. Segundo Leontiev (1991), a linguagem possibilita ao homem ter consciência das coisas, o que é um dos principais fatores que nos diferencia dos animais.

O homem na contemporaneidade, a partir da linguagem é um ser capaz de planejar, desenvolver, criar e conjecturar ideias, alterando o seu meio, o que conseqüentemente modifica o seu convívio social. Nessa perspectiva evolutiva, tem-se na Educação, especificamente no Brasil, um ciclo transitivo sobre as formas de ensino, as quais têm suas metodologias, conteúdos e concepções contrapostas constantemente por novas ideologias. Tomando como exemplo as transformações na área da Educação no decorrer do último século, podem-se citar algumas ideologias de ensino como a Escola Tradicional, a Escola Nova, o Movimento da Matemática Moderna, dentre outras.

Em suma, a metodologia da Escola Tradicional concebia o professor como detentor dos saberes e um modelo a ser seguido pelos alunos/crianças, para que conseguissem enaltecer a parte essencial de sua natureza e aprisionar a parte corrompida. Neste não se valorizava os pré-conhecimentos dos alunos nem suas opiniões e conjecturas dentro da sala de aula. Em contrapartida a esta, a metodologia da Escola Nova concebia o aluno como detentor dos saberes e o professor como um ser mediador, cuja funcionalidade era guiar o aluno a apropriação dos conhecimentos a partir da valorização dos pré-conhecimentos. Já no movimento da Matemática moderna, ou ainda, o movimento de renovação do ensino da Matemática ocorrera no Brasil por volta dos anos 60, por grandes influências internacionais, e inicialmente tinha por principal objetivo a preocupação com o conteúdo que se ensinava, mas em diversos projetos curriculares da época envolvendo está ideologia tinha-se a preocupação com o método de ensino, objetivos como o da participação ativa do aluno para a construção do conhecimento, o estímulo à descoberta e à resolução de problemas, a ideia de que aprender Matemática é "fazer matemática".

Em vista disto, tem-se uma grande diversidade nas metodologias de ensino tomadas por cada profissional da Educação, os quais podem acabar sendo influenciados inconscientemente por determinada ideologia, o que impossibilita que os discentes se apropriem de conhecimento. De fato, isto se evidencia, pois cada indivíduo desenvolve sua consciência e saberes de acordo com os meios em que convive e as influências que agem sobre o mesmo, no caso do professor sua formação e seu ambiente de trabalho e convívio social, o que corrobora com o que traz Leontiev:

“A criança, no momento do nascimento, não passa de um candidato à humanidade, mas não a pode alcançar no isolamento: deve aprender a ser um homem na relação com os outros homens” (LEONTIEV apud BOCK p. 238).

Na contemporaneidade, com os avanços tecnológicos tem-se a globalização da informação, das diversas culturas e saberes sociais, o que acarreta em algumas características aos indivíduos conviventes a este meio. Pode-se notar tal influência nas instituições de ensino, as quais atendem diferentes públicos sociais, culturais, étnicos e morais, que dentro de suas condições oportunizam a apropriação do conhecimento e conseqüentemente o desenvolvimento cognitivo das novas gerações. Entretanto o trabalho do professor nem sempre possibilita que os discentes consigam se beneficiar deste aspecto, seja por não se adaptarem a forma de ensino ou por obstáculos decorrentes de experiências anteriores.

Sobre esta perspectiva, de diversidade de indivíduos e metodologias no ensino, surgem os obstáculos epistemológicos e os obstáculos didáticos. Na educação o primeiro refere-se a um entrave, para o aluno, no desenvolvimento de um novo conceito/conhecimento por conta da presença de outros saberes que conflitam com o novo. O segundo refere-se, ao professor, que por conta de sua práxis pedagógica ou em alguma estratégia/plano de aula e até mesmo sua opinião constitui obstáculos didáticos que prejudicam a qualidade do ensino.

Em virtude destes obstáculos no ensino que impossibilitam a aprendizagem, torna-se necessária uma mudança que ultrapasse uma preocupação conteudista ou centrada nas práticas pedagógicas e metodológicas. Segundo Becker (1993) é necessário uma mudança epistemológica, visto que atualmente nas salas de aula os professores dizem adotar uma posição ora empirista e ora apriorista, ou seja, uma valorizando o prática/experiência e outra a raciocínio. Isto decorre

da formação destes professores, a qual se baseava no instrucionismo, ou seja, na transmissão dos conteúdos como se fosse a única forma de abstraí-los, desconsiderando assim a criatividade.

Estas mudanças podem começar a partir de um olhar reflexivo sobre a prática pedagógica, no intuito de encontrar caminhos ainda desnivelados que possam ser corrigidos e aprimorados por meio da reformulação do plano de ensino.

Visto que o plano de ensino do educador é um instrumento de grande importância no processo de ensino/aprendizagem, o qual não deve se desenvolver em um processo único, mas sim em uma integração de processos que possibilite o entendimento de todos os discentes. Para tal é necessário que o educador matemático saiba diferenciar o seu trabalho da atividade de pesquisador matemático. Pois enquanto o trabalho desenvolvido pelo pesquisador se volta a desenvolver demonstrações, provar ou falsear teoremas, criar conceitos por meio de avaliação e aprovação de uma comunidade científica, levando assim ideias simples a complexidade e conseqüentemente generalizações.

O trabalho do educador se volta a reformular esta generalização no intuito de torná-la o mais compreensível para desenvolvê-la em seu plano de aula, assim possibilitando o acesso desse conhecimento aos alunos partindo de exemplos e contextualizações básicas até as complexas. Para que assim os alunos vejam o conteúdo e o estudo não como um castigo, mas como um treinamento e algo necessário para a aprendizagem.

[...] é necessário que o/a aluno/a utilize várias vezes o mesmo tipo de pensamento e conhecimento matemático, não para memorizá-lo, mas, sim, para abstraí-lo, estendê-lo, ou generalizá-lo, como também, para aumentar sua autoconfiança e sua familiarização com o mesmo. O treinamento pode auxiliar no desenvolvimento de um pensamento dedutivo ou lógico mais rápido. Muitas vezes, é através de exercícios repetitivos que o/a aluno/a percebe a existência de outro caminho de resolução que poderia ser seguido aumentando, assim, suas possibilidades de ação e intervenção. Além disso, o jogo de treinamento pode ser utilizado para verificar se o/a aluno/a construiu ou não determinado conhecimento, servindo como um “termômetro” que medirá o real entendimento que o/a aluno/a obteve. Entretanto, com a participação do/a aluno/a nos jogos e sua necessária participação ativa, o/a professor/a poderá perceber as suas reais dificuldades, auxiliando-o a saná-las. (LARA apud STRAPASON, 2011, p. 38).

Esta reflexão possibilitaria o cumprimento das expectativas previstas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para Matemática, os quais visam que no segundo ciclo do ensino fundamental seja propiciado aos alunos situações-problemas que lhes permitam ir além do conjunto dos números naturais, por meio da compreensão de alguns conceitos como o da divisão e o da multiplicação, aproximando-se assim de uma noção inicial de número racional para que posteriormente sejam feitas generalizações.

A elaboração e análise de um plano de aula e metodologia de forma rigorosa e assídua possibilitaria aos estudantes uma compreensão dos conceitos matemáticos de uma forma menos árdua do que ocorre rotineiramente nas salas de aula, em que por mais que o professor tente expressar os conceitos de outras maneiras estes não são compreendidos pelos estudantes, assim sua formação fica em desacordo com o previsto nos PCNs.

Outro aspecto relevante no processo de ensino/aprendizagem, especificamente na Matemática, é a relação aluno professor, visto que o caráter estático do ensino vem cada vez mais se despidendo, objetivando uma dinamicidade na construção dos conceitos dentro da sala de aula que suscite em uma maior interação entre professor e aluno.

Os obstáculos epistemológicos e didáticos, também podem ser vistos em um grande problema na educação, que é o processo cognitivo de formação de conceitos. No que diz respeito à Matemática, esta problemática encontra-se facilmente nas salas de aula, visto que o método de ensino tradicional valoriza a exposição dos conceitos, construídos a partir de décadas de estudo e pesquisas. No entanto a exposição destes para os alunos, no intuito de introduzir um conteúdo, acaba na maioria das vezes tendo um caráter ineficaz no processo de ensino e aprendizagem, pois nem mesmo um cientista parte da generalização para uma situação específica, mas traça justamente o caminho contrário, ou seja, parte do específico para a generalização.

Em vista disto, pode-se tomar um olhar sobre a Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud, a qual possibilita uma compreensão mais profunda sobre a formação de conceitos e dos campos conceituais, visto que considera o ensino a partir de definições um processo que não explicita totalmente as noções tidas nos conceitos. Para Vergnaud (2014) um conceito deve ser visto como resultado de experiências ou situações específicas. Logo para expressar a totalidade de conceito matemático é necessário partir de exemplificações. Segundo Vergnaud (1996):

“Um conceito é uma tríade que envolve um conjunto de situações que dão sentido ao conceito; um conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito e um conjunto de significantes que podem representar os conceitos e as situações que permitem aprendê-los.” (VERGNAUD, G. 1996)

Assim, pretende-se neste breve trabalho relatar alguns obstáculos epistemológicos e didáticos muito comuns no ensino dos algoritmos da multiplicação e da divisão, em decorrência de alguns fatores como o abuso de linguagem utilizado na apropriação de conhecimentos preliminares, a metodologia de ensino, a falta de planejamento, entre outros destacando algumas alternativas para transpor tais obstáculos.

## 2 O algoritmo da divisão

O ensino da divisão, no segundo ciclo do ensino fundamental, por muitas vezes é uma tarefa árdua para o professor, visto que muitos dos estudantes ainda portam dificuldades de uso deste mecanismo operatório ainda no campo dos números naturais. Estas decorrem desde a não compreensão do algoritmo da divisão em si como também de dificuldades com a adição, subtração e multiplicação. Assim tem-se que este algoritmo engloba muito mais do que simplesmente o conceito de dividir.

Em virtude desta complexidade, têm-se nas salas de aula alguns obstáculos epistemológicos evidenciados frequentemente nas aulas de matemática. Pode-se citar como um dos principais a tabuada, que por ser ensinada, muitas vezes, de uma forma cansativa e por obrigação acaba não fazendo sentido para os alunos, os quais simplesmente tentam decora-la para as ativi-

dades ao invés de compreendê-la. Nesse sentido, para transpor este obstáculo, o professor pode utilizar-se da ideia de somas sucessivas em que para o aluno realizar uma multiplicação do tipo  $a * b$ , precisa somar o número  $b$  em  $a$  vezes. Esta forma pode suprir os problemas com a tabuada, inibindo assim a necessidade de os alunos a decorarem.

Além disto, o professor também pode se utilizar indagações como “Quantas vezes  $b$  cabe no  $a$ ?” , no caso de  $\frac{b}{a}$ , ou ainda “Qual o valor que se deve multiplicar  $a$  para se obter  $b$ ?” de forma a fazer com que os alunos raciocinem reflexivamente.

Outro obstáculo muito presente é a falta de domínio do algoritmo pelos alunos, visto que muitos não observam que a mesma se realiza da esquerda para a direita, modo inverso ao da multiplicação, em decorrência das classes numéricas a unidade, dezena, centena e daí por diante, ou ainda, por não compreenderem estas classes de ordenação. Ou seja, tem dificuldades de relacionar reciprocamente que uma centena são dez dezenas ou cem unidades.

Para resolver tal obstáculo o professor precisa utilizar-se de uma linguagem coerente na transposição de seus conhecimentos, por exemplo, ao dividir um número de três algarismos por outro de dois algarismos sendo assim  $\frac{abc}{df}$  deve-se explicitar que o  $a$  representa  $a$  centenas, o  $b$  representa  $b$  dezenas e o  $c$  representa  $c$  unidades. Para então continuar a divisão, como não se consegue dividir igualmente o  $a$  por  $df$  então trocasse as  $a$  centenas por  $a * 10$  dezenas, ficando assim com  $a * 10 + b$  dezenas, que se for possível de se dividir igualmente por  $df$  resultará em um resto  $e$ , o qual será somado as  $c$  unidades, para então se possível dividir novamente. Caso não seja possível dividir  $a * 10 + b$  por  $df$ , trocasse as  $a * 10 + b$  dezenas por  $10(a * 10 + b)$  unidades e somasse com as  $c$  unidades, para então realizar a divisão que resultará em um resto  $x$ .

Estes meios possibilitam explorar o processo de divisão longo, todavia é possível também explorar o seu ensino e aprendizagem por meio de processos de cálculo mental e pelo método “americano” que suprime as subtrações, assegurando o intuito de superar as defasagens dos alunos e propicia-los a apropriação de novos conhecimentos.

Pode-se notar também, que há diferentes formas de representação ou execução do algoritmo da divisão, como o repartir igualmente e medir, sendo geralmente a primeira a mais enfatizada na sala de aula. Em suma ao se trabalhar com a ideia de repartir igualmente sabe-se em quantas partes o total será dividido, mas não quantas unidades terá cada uma das partes. Enquanto no trabalho com a ideia de medir, não se sabe quantos grupos serão formados. Essa é a ideia de medir:

“Sempre que queremos medir uma grandeza, escolhemos como unidade de medida uma grandeza de mesma espécie daquela que se quer medir e a tomamos como padrão. Por exemplo, para medir a largura de uma quadra esportiva, podemos usar como unidade padrão o nosso passo, um pedaço de barbante, uma vareta, o nosso palmo, etc.” (TOLEDO, 1997)

Ainda sobre métodos de se trabalhar a divisão, pode-se citar a ideia de comparação, a qual é dificilmente trabalha nas séries iniciais devida sua complexidade. Em suma busca-se quantas vezes a medida de uma determinada grandeza é maior do que outra medida de mesma grandeza, esse resultado será chamado de razão.

Estas diferentes formas de representação, perante a Teoria dos Campos Conceituais, permitem por meio de exemplificações trabalhar a mesma operação com interpretações diferentes, que variam de ideias simples como “Se ana dividiu igualmente 15 doces para suas 5 amigas, quantos doces cada uma recebeu?” para problemas mais complexos como “Se ana tinha 15 doces e distribui igualmente para cada uma de suas cinco amigas. Qual a razão entre a quantia que cada uma recebeu e o todo?”, estes em sua maioria são incompreensíveis para os discentes.

Outro obstáculo muito presente, em decorrência do abuso de linguagem, é a percepção por parte dos alunos de que uma divisão sempre resultará em um resultado menor do que os números operados. Isto acaba sendo utilizado no trabalho com os números inteiros e se torna um obstáculo na transição para o conjunto dos números racionais. Visto que neste conjunto, os alunos se deparam com divisões em que o numerador e o divisor podem ser números fracionários. Logo o resultado da divisão pode ser um número maior do que aqueles operados. Para transpor este obstáculo e também outros, o professor precisa se valer da análise da própria práxis pedagógica de maneira a identificar inferências que podem se tornar barreiras à abstração de novos conhecimentos.

Outras metodologias de ensino da qual o professor pode se valer são o uso de materiais lúdicos e materiais manipuláveis, não apenas como uma de atividade diferenciada, mas como uma medição para a aprendizagem. Visto que a maioria dos profissionais tende a não utilizar estes materiais, pois muitas vezes não conseguem criar ou visualizar relações entre os mesmos e os conteúdos matemáticos. O uso de jogos na matemática proporciona um ambiente de interação contínua entre os alunos e o professor, ou seja, há o compartilhamento de interações entre indivíduos e seus momentos de aprendizagem. Algumas das vantagens do uso de jogos na Matemática são:

Há muitas vantagens para o aluno na utilização de jogos como estratégia de ensino e aprendizagem da Matemática. Entre elas destacamos: a oportunidade para a aprendizagem ativa, ou seja, é o aluno o agente de sua própria aprendizagem; a motivação visual proporcionada pelos materiais manipuláveis, geralmente coloridos e diferenciados; a motivação proporcionada ao aluno pelo grau de chance de ganhar o jogo; a mudança de rotina da sala de aula, deixando de lado os exercícios com lápis e papel; a oportunidade que o aluno tem, durante os jogos, de manifestar suas dificuldades individuais de aprendizagem e receber auxílio de seus colegas de grupo e do professor; a promoção de raciocínios sem interrupções durante o tempo de cada jogada, propiciando uma aprendizagem mais continuada e a elevação da autoestima dos alunos que jogam através da interação social positiva, reduzindo o medo e a ansiedade para aprender Matemática. (STRAPASON, 2011, p. 28)

O material lúdico possui grande potencial na aprendizagem possibilitando ao educador um contato mais harmônico e dinâmico com a sala aula tornando-a um espaço de total aproveitamento para o ensino. Em suma, “convém termos sempre em mente que a realização em si de atividades manipulativas ou visuais não garante a aprendizagem. Para que esta efetivamente aconteça, faz-se necessária também a atividade mental, por parte do aluno. E o material manipulável pode ser um excelente catalisador para o aluno construir seu saber matemático.”(LORENZATO, 2006, p. 21)

Pode-se citar o jogo Resto que Avança, no qual os alunos que já tem certo domínio do

algoritmo da divisão no campo dos números naturais podem explorar algumas características. Pode-se citar o fato de que se o número for múltiplo de seu divisor o resto é sempre zero, a existência de números que são divisíveis de maneira inteira apenas por um e por ele mesmo, números com infinitos divisores ou múltiplos, entre outros. Sendo que nestas atividades, o professor deve incentivar os alunos a pensarem reflexivamente e registrarem suas conjecturas e cálculos em uma folha, pois “com a participação do/a aluno/a nos jogos e sua necessária participação ativa, o/a professor/a poderá perceber as suas reais dificuldades, auxiliando-o a saná-las.” (LARA, 2003, p. 25 apud Strapason, 2011, p.38)

Porém existe uma diferença nos resultados obtidos em uma aula em que o professor apresenta um conteúdo com o material manipulável e uma em que os alunos o manuseiam, sendo que de acordo com Lorenzato (2006), no segundo caso os resultados “serão mais benéficos à formação dos alunos, porque, de posse do material manipulável, as observações e reflexões deles são mais profícuas, uma vez que poderão, em ritmos próprios, realizar suas descobertas e, mais facilmente, memorizar os resultados obtidos durante suas atividades.” (LORENZATO, 2006, p. 27)

### 3 Multiplicação

Obstáculos epistemológicos são por definição conhecimentos que por sua vez se caracterizam como barreiras na construção de novos saberes e os didáticos, diferenciando-se em detalhes técnicos, sendo definidos no âmbito escolar e afins, associado a conteúdos relativamente estabelecidos que obstruam o surgimento de futuros conhecimentos, no que concerne a aplicabilidade do mesmo. Um exemplo que retrata as definições acima ratificadas, é quando um professor tenta explicar ao aluno algum conteúdo dando-lhe a resposta, muitas vezes a resposta imediatamente dada se comporta como um obstáculo, pois a criatividade do aluno se comprometeu tanto com ela a ponto de toma-la como verdade sólida e imutável.

Quando se pensa em obstáculos epistemológicos e didáticos, usualmente nos remetemos a pensar que apenas conteúdos avançados os geram, o que não passa de um engano, pois é na base que os obstáculos começam a se propagar e persistir na vida de um aluno, decorrente da não compreensão de conceitos de maneira relevante, outrora sendo educado num sistema que busca somente o resultado concreto por meio de decoreba.

É o que acontece com o ensino da multiplicação na Educação básica, levada apenas como um método de reprodução algorítmica, método este que não abrange todo o aparato de conhecimentos implícitos no que cerne a formação da multiplicação, são alguns como somas sucessivas, ideia de proporcionalidade, sendo estas importantes geratrizes de outros conteúdos diretamente relacionados, a saber, potenciação, regra de três, porcentagem, escalas e razão e proporção. Percebe-se então a importância de ensinar/aprender multiplicação de uma maneira a comportar todas as suas facetas, pois do contrário caracterizar-se-á como obstáculos didáticos e ou epistemológicos.

Uma vez que desta maneira apresentada o conteúdo vai formando um obstáculo para

o aluno, então em resposta a isto podemos considerar o que os PCNs nos dizem a respeito do ensino da matemática:

O ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema; o problema não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório; aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros; o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas; a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas (BRASIL 1997, p. 43)

O que faz total sentido, ora se o contexto no qual os alunos estão inseridos, que de certa forma abrange o do professor, tal contexto contempla todas as mais variadas facetas multiplicativas, ambiente ideal para ser transposto para a sala de aula é razoável que o sujeito tenha a capacidade de compreender os métodos em seu envolvimento, fazendo com que ele aprenda à aplicação em suas variadas formas, sabendo o porquê implícito em cada um. A maneira como é exposto o conceito multiplicativo no ensino fundamental falha neste quesito, por separar este campo em fragmentos, ensinando separadamente multiplicação como sendo somas sucessivas por exemplo.

Esta atitude é veementemente criticada por Vergnaud (1983), que chama de “ilusão pedagógica” a atitude dos professores que pensam sobre o ensino da matemática como perfeita se e somente se for organizada, clara, rigorosa e formal e que só assim os alunos poderão aprender.

Tratando disto, é no ensino fundamental que encontramos a fábrica de obstáculos, onde são apresentadas várias dificuldades, que em primeira instância são tratados de maneiras superficiais, suprindo muitas vezes a dúvida momentânea, mas sem saber se esta não foi gerada por tantas outras que ficaram para trás sem explicação.

Um exemplo evidente de formação de obstáculo ou até mesmo de um obstáculo formado reside na dificuldade, que alunos de sétimo ano, por exemplo, tem em entender que  $(-x)^n$  é diferente de  $-x^n$  com  $n$  pertencente aos naturais e sendo par e  $x$  um número real qualquer.

Outro recurso quase que instantâneo é recorrer à “regrinha” que nos diz, se o expoente é par o resultado é sempre positivo, sendo falha com este exemplo, pois a diferença mora exatamente no uso dos parênteses são eles que indicam se o sinal permanece nas  $n$ -repetições ou não, tornando-se obstáculo didático quando o aluno não entende a potenciação como uma série de multiplicações, e um obstáculo epistemológico quando o uso da regrinha antes descrita atrapalhe na verdadeira compreensão do método.

Outra situação corriqueira, porém de grande visibilidade quando falamos de obstáculos, é a interpretação do algoritmo. Num breve exemplo buscar-se-á explicitar tal dificuldade: Seja  $a$  e  $b$  números inteiros,  $a$  representando número de flores e  $b$  o número de vasos. Quero organizar uma determinada quantidade de flores em uma quantidade de vasos a fim de obter-se outra quantidade  $c$  de vasos com flores, então  $b * a = c$ . De uma maneira geral  $b * a = a * b$ , contudo

neste exemplo vemos que  $a$  e  $b$  exprimem quantidades de elementos diferentes, então  $b * a \neq a * b$ .

Percebe-se que se a multiplicação for ensinada apenas com intuito de “algoritmificar”, estes detalhes passam despercebidos, ou seja, para mente do aluno que não desenvolveu o raciocínio reversível, é fácil prender-se a particularidades interpretativas, quiçá entender as propriedades dos processos multiplicativos.

Uma saída é trabalhar com a teoria de Campos Conceituais elaborada por Gerard Vergnaud, ele mesmo define um campo conceitual como “um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros, e provavelmente entrelaçados durante o processo de aquisição” (VERGNAUD 1990, p8). Com esta teoria é possível tratar a multiplicação como um campo conceitual que realmente é, maximizando de certo modo as chances de se obter êxito nos processos de ensino e aprendizagem de matemática, especificamente ao ensino de multiplicação.

Ainda sobre multiplicação, não se pode esquecer o conjunto dos racionais. O obstáculo mais comum é a automatização quando se aplica o algoritmo da multiplicação, normalmente quando se tem um número racional  $\frac{a}{b}$ ;  $b \neq 0$  e  $a$  um número inteiro e multiplicá-lo por um número inteiro  $c$ , todos sabemos que se dá com  $\frac{a*c}{b}$ , porém com o pensamento do aluno restringido de tal maneira a aplicar a multiplicação, faz com que o mesmo pense na conta como sendo  $\frac{a*c}{b*c}$  por se tratar de uma operação entre dois números somente. Notavelmente não aprendeu sobre somas sucessivas, maneira na qual se encaixa perfeitamente, pois concebendo a conta como uma sequência de somas, o aluno terá uma visão clara da situação que  $\frac{c*a}{b}$  é  $\frac{a}{b}$  somado  $c$  vezes.

Um erro notório que permeia o ensino da multiplicação é vê-la como um conceito pronto a ser reproduzido, como uma extensão apenas da operação de soma, concebê-la como um campo conceitual é de suma importância para que o aluno entenda que dentro do campo multiplicativo contém muito mais que operações, mas uma pura aplicação do que se encontra no seu contexto, quando entender isso estará menos suscetível a desenvolver obstáculos, tanto epistemológicos quanto didáticos, bem como o processo de ensino aprendizagem se tornará mais desafiador, motivando o seu cognitivo a trabalhar com situações problemas não rotineiras, Vergnaud (2014) nos diz a respeito disto quando explica que um conceito não pode ser visto como um resultado pronto de uma definição e sim como produto de experiências. Desta forma os conhecimentos traçam seus sentidos a partir de uma variedade de situações. Sendo assim cada situação não deve e não pode ser analisada com auxílio de apenas um conceito da mesma maneira um conceito e uma situação problema isolada dará conta de todo o processo de aquisição do conhecimento.

Estes obstáculos envolvendo os processos multiplicativos podem culminar na incompreensão de vários outros conteúdos que dependem dele, o estudo de áreas e perímetros, por exemplo, pois área e perímetro são multiplicações, representando aspectos diferentes de uma mesma figura, caso isto não fique claro será outro conceito que se cristalizará na cognição do aluno de modo a atrapalha-lo futuramente, mostrando assim a sensibilidade do ensino de um conteúdo, pois certamente ele estará atrelado a outro que possivelmente gerou barreiras que já se consolidaram na mente do aluno.

## 4 Considerações Finais

Os obstáculos no ensino, apesar de sempre existirem, podem ser superados a partir da mediação do professor, o qual pode se valer de metodologias diferenciadas de maneira a instigar a curiosidade dos alunos para com o conteúdo, bem como buscar na teoria dos Campos Conceituais uma base sólida para o ensino e é através dela que será possível localizar rupturas e continuidades nos conhecimentos do ponto de vista conceitual (VERGNAUD, 1990, pag. 133), em Matemática. O ensino lúdico da divisão e multiplicação pode ser uma alternativa para despertar o interesse dos alunos potencializando a aprendizagem. Ao educador cabe um embasamento e uma preparação prévia definindo os objetivos que almeja atingir. Ressalta-se que o professor deve se utilizar de atividades interativas, por proporcionar interação e evidenciar momentos de troca de conhecimento entre os alunos.

## Referências

- BECKER, F. **A epistemologia do professor: o cotidiano da escola**. 3. ed. Petrópolis: Vozes, 1993.
- BOCK, A. M. B.; FURTADO, O.; TEIXEIRA, M. L. T. **Psicologias: Uma introdução ao estudo de Psicologia**. São Paulo: Saraiva, 2001.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática/Secretaria de Educação Fundamental**. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- LARA, I. C. M. **Jogando com a Matemática na Educação Infantil e Séries Iniciais**. São Paulo: Rêspel, 2003.
- LEONTIEV, A. N. **O desenvolvimento do psiquismo**. Trad. Manuel D. Duarte. Lisboa, Livros Horizonte, 1978.
- LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.
- PAIS, Luiz C. **Didática da Matemática: Uma análise da influência francesa**. 3ª ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.
- STRAPASON, L. P. R. **O uso de jogos como estratégia de ensino e aprendizagem da Matemática no 1º ano do Ensino Médio**. Dissertação - Centro Universitário Franciscano (UNIFRA). Santa Maria (RS), 2011.
- TOLEDO, M.; TOLEDO, M. **Didática da Matemática: como dois e dois: a construção da Matemática**. São Paulo: FTD, 1997.
- VERGNAUD, G.. **Multiplicative structures**. IEm R. Lesh 8 M. Landau (Eds.). Acquisitions of mathematics concepts and procedures Academic Press, New York, 1983.
- VERGNAUD, G. **La teoria de los campos conceptuales**. CNRS y Université René Descartes. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 10,nº 2, 3, pg. 133-170, 1990.
- VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar**. Gerard Vergnaud; tradução Maria Lucia Faria Moro. 3. ed. Curitiba: Ed. da. UFPR, 2014

## Teorema do ponto fixo de Banach e aplicações

Fernanda Paula John  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
fernanda.john@live.com

Sandro Marcos Guzzo  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
smguzzo@gmail.com

**Resumo:** Neste trabalho estudaremos o Teorema do ponto fixo de Banach, tal teorema garante a existência e unicidade de solução para diferentes tipos de equações, como, equações numéricas, equações diferenciais (Teorema de Picard) e equações integrais (Equação de Fredholm). Fornece ainda, um método iterativo para encontrar tal solução.

**Palavras-chave:** Ponto fixo; Contração; Teorema do ponto fixo de Banach.

### 1 Sequências

Do ponto de vista intuitivo sugere-se pensar numa sequência  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  de números reais como uma sequência de pontos da reta e no seu limite como um ponto do qual os pontos  $x_n$  tornam-se e permanecem arbitrariamente próximos, desde que se tome o índice  $n$  suficientemente grande.

**Definição 1.** Uma sequência de números reais é uma função  $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida no conjunto  $\mathbb{N} = 1, 2, 3, \dots$  dos números naturais e tomando valores do conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais. O valor  $x(n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , é representado por  $x_n$  e chamado “o termo de ordem  $n$ , ou  $n$ -ésimo termo da sequência”.

A sequência  $(x_n)$  é limitada quando o conjunto dos seus termos é limitado, isto é, quando existem números reais  $a, b$  tais que  $a \leq x_n \leq b, \forall n \in \mathbb{N}$ . Isto quer dizer que todos os termos da sequência pertencem ao intervalo  $[a, b]$ .

Quando uma sequência não é limitada ela é ilimitada. Uma sequência  $(x_n)$  diz-se limitada superiormente quando existe um número real  $b$  tal que  $x_n \leq b, \forall n \in \mathbb{N}$ . Isto significa que todos os termos  $x_n$  pertencem à semi-reta  $(-\infty, b]$ . Analogamente, diz-se que  $(x_n)$  é limitada inferiormente quando existe  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $a \leq x_n$ , ou seja,  $x_n \in [a, +\infty), \forall n \in \mathbb{N}$ . Evidentemente, uma sequência é limitada se, e somente se, é limitada superior e inferiormente.

Não exibiremos nessa seção as demonstrações dos teoremas e lemas, as mesmas estão disponíveis em Leithold (1994) e Lima (2002).

**Teorema 2.** (*Unicidade de limite*) Se  $\lim x_n = a$  e  $\lim x_n = b$  então  $a = b$ .

**Teorema 3.** Se  $\lim x_n = a$  então toda subsequência de  $(x_n)$  converge para o limite  $a$ .

**Teorema 4.** *Toda sequência convergente é limitada.*

**Teorema 5.** *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

**Definição 6.** Seja  $(x_n)$  uma sequência de números reais.  $(x_n)$  se chama *sequência de Cauchy* se e somente se dado arbitrariamente um número real  $\varepsilon > 0$ , pode-se obter  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m > n_0$  e  $n > n_0$  implicam  $|x_m - x_n| < \varepsilon$ .

**Teorema 7.** *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

A recíproca do último teorema é que não é válida, ou seja, nem toda sequência de Cauchy converge. Entretanto para sequências de Cauchy de números reais é válida a recíproca.

**Lema 8.** *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

**Lema 9.** *Se uma sequência de Cauchy  $(x_n)$  possui uma subsequência convergindo para  $a \in \mathbb{R}$  então  $\lim x_n = a$ .*

**Teorema 10.** *Toda sequência de Cauchy de números reais é convergente.*

## 2 Espaço de Banach

**Definição 11.** Um conjunto  $X$ , diz-se um espaço métrico se existir uma aplicação  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  que verifica as condições

1.  $d(x, y) = 0$  se e só se  $x = y$ ,
2. Se  $x \neq y$ , então  $d(x, y) > 0$ ,
3.  $d(x, y) = d(y, x)$ ,
4.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ,

quaisquer que sejam  $x, y, z \in X$ .

A função  $d$  da definição anterior, é chamada de métrica em  $X$ .

**Exemplo 12.** O conjunto  $\mathbb{R}$ , dos números reais, é um dos exemplos mais importantes de espaço métrico com respeito à métrica  $d(x, y) = |x - y|$ .

**Definição 13.** Uma norma em um espaço vetorial real  $E$  é uma aplicação  $\|\cdot\| : E \rightarrow [0, \infty)$  que satisfaz as seguintes propriedades

1.  $\|u\| \geq 0$  e  $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$ ,
2.  $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$ ,
3.  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ ,

quaisquer que sejam  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $u, v \in E$ .

Se  $E$  é um espaço vetorial normado, então a aplicação  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $d(x, y) = \|x - y\|$  é uma métrica em  $E$ , chamada de métrica induzida pela norma.

**Definição 14.** Um espaço métrico  $E$  é dito completo se toda sequência de Cauchy converge (em  $E$ ). Isto é, dada qualquer sequência de Cauchy  $(x_n)$ , com  $x_n \in E$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $a \in E$  de forma que  $x_n \rightarrow a$ .

**Definição 15.** Um espaço vetorial normado completo é um espaço de Banach.

**Exemplo 16.** O conjunto dos números reais e o conjunto dos números complexos são espaços de Banach onde a norma é o próprio valor absoluto.

**Exemplo 17.** O conjunto  $C[a, b]$  das funções contínuas munido da métrica do supremo é um espaço de Banach.

### 3 Contrações

**Definição 18.** Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. Uma função  $T : X \rightarrow X$  é chamada de contração sobre  $X$  se existe um número real positivo  $\alpha < 1$ , tal que para todo  $x, y \in X$ ,

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y).$$

**Lema 19.** (*Unicidade de Ponto Fixo*) Num espaço métrico  $X$ , se  $T : X \rightarrow X$  é uma contração e  $T$  possui um ponto fixo, então esse ponto é único.

*Prova.* Suponhamos que  $x$  e  $x'$  sejam pontos fixos de  $T$ . Assim teríamos

$$d(x, x') = d(Tx, Tx') \leq \alpha d(x, x')$$

ou seja,

$$d(x, x') \leq \alpha d(x, x') \Rightarrow (x, x') - \alpha d(x, x') \leq 0 \Rightarrow (1 - \alpha)d(x, x') \leq 0,$$

e como  $0 \leq \alpha < 1$  temos que a única situação que satisfaz a expressão acima é quando  $d(x, x') = 0$ , que ocorre somente se  $x = x'$ , ficando provada a unicidade do ponto fixo.  $\square$

**Lema 20.** (*Contração*) Se  $T$  é uma contração, então  $T^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) também é uma contração.

*Prova.* Usemos indução sobre  $n$ . Se  $n = 1$ , não há o que mostrar. Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para  $k$ , ou seja,  $d(T^k x, T^k y) \leq \lambda d(x, y)$ , com  $0 < \lambda < 1$ . Provemos então que  $d(T^{k+1} x, T^{k+1} y) \leq \alpha d(x, y)$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

De fato,

$$\begin{aligned} d(T^{k+1} x, T^{k+1} y) &= d(T(T^k x), T(T^k y)) \\ &\leq \beta d(T^k x, T^k y) \\ &\leq \beta \lambda d(x, y). \end{aligned}$$

Assim,  $d(T^{k+1} x, T^{k+1} y) \leq \alpha d(x, y)$ , onde  $0 < \alpha < 1$  e  $\alpha = \beta \lambda$ .  $\square$

**Lema 21.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivável. Então  $f$  é uma contração em  $[a, b]$  se, e somente se, existe  $0 < c < 1$  tal que  $|f'(d)| \leq c$ , para qualquer  $d \in (a, b)$ .*

*Prova.* Suponha  $|f'(d)| \leq c$ , para qualquer  $d \in (a, b)$ , com  $0 < c < 1$ . Pelo Teorema do Valor Médio temos que, para quaisquer  $x, y \in (a, b)$ , com  $x < y$ ,

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| = |f'(k)|,$$

com  $x < k < y$ . Como, por hipótese,  $|f'(d)| \leq c$  para qualquer  $d \in (a, b)$ ,  $|f'(k)| \leq c$ . Logo

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= |f(y) - f(x)| \\ &= |f'(k)||y - x| \\ &\leq c|y - x| = cd(x, y). \end{aligned}$$

Dessa forma,  $d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$  com  $0 < c < 1$ ,  $f$  é uma contração.

Para a recíproca, suponhamos que  $f$  é uma contração em  $[a, b]$ .

Sejam  $x, x + h \in (a, b)$ . Como  $f$  é uma contração sabemos que  $d(f(x), f(x + h)) \leq cd(x, x + h)$  com  $0 \leq c < 1$ , ou seja  $|f(x + h) - f(x)| \leq c|x + h - x| = c|h|$ , em que podemos escrever

$$\left| \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \right| \leq c$$

desde que  $h \neq 0$ . Sabendo que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

então

$$|f'(x)| = \left| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \right| \leq c,$$

para qualquer  $x \in (a, b)$ . □

## 4 Teorema do Ponto Fixo de Banach

**Definição 22.** Suponha  $X$  um conjunto não vazio, e  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação. Um ponto fixo de  $f$  é um ponto  $x \in X$  de forma que  $f(x) = x$ .

Dito de outra forma, um ponto fixo de uma aplicação é um ponto, do domínio da aplicação, que não se altera pela aplicação.

**Teorema 23.** *Sejam  $X$  um espaço métrico completo e  $T : X \rightarrow X$  uma contração em  $X$ . Então  $T$  tem precisamente um ponto fixo.*

*Prova.* Para a demonstração construiremos uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e mostraremos que ela é de Cauchy, o que garante sua convergência pelo espaço ser completo. Depois, mostraremos que seu limite  $x$  é um ponto fixo de  $T$ , assim fica provada sua existência e unicidade.

Escolhemos qualquer  $x_0 \in X$  e definimos a sequência iterativa  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , por

$$\begin{aligned} & x_0 \\ & x_1 = T(x_0) \\ & x_2 = T(x_1) = T^2(x_0) \\ & \vdots \\ & x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0) \\ & \vdots \end{aligned}$$

Disso temos que

$$d(x_{m+1}, x_m) = d(T(x_m), T(x_{m-1})),$$

e provemos que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é de Cauchy. Por  $T$  ser uma contração, obtemos para  $n < 1$ ,

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(T(x_{n-1}), T(x_n)) \leq \alpha d(x_{n-1}, x_n),$$

e concluímos, então, que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha d(x_{n-1}, x_n) \leq \dots \leq \alpha^{n-1} d(x_1, x_2).$$

Colocando  $n = k$  e usando indução sobre  $k$  temos que  $d(x_k, x_{k+1}) = \alpha^{k-1} d(x_1, x_2)$  é válido.

Então para  $k + 1$ ,

$$\begin{aligned} d(x_{k+1}, x_{k+2}) &= d(T(x_k), T(x_{k+1})) \\ &\leq \alpha d(x_k, x_{k+1}) \\ &\leq \alpha \alpha^{k-1} d(x_1, x_2) \\ &= \alpha^k d(x_1, x_2), \end{aligned}$$

tornando o seu resultado válido  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Então, para todo  $m, n \in \mathbb{N}$  com  $m > n$ , tem-se

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_m) \\ &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_m) \\ &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_{n+3}) + d(x_{n+3}, x_m) \\ &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \alpha^{n-1} d(x_1, x_2) + \alpha^n d(x_1, x_2) + \dots + \alpha^{m-2} d(x_1, x_2) \\ &= \alpha^{n-1} d(x_1, x_2) [1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-n-1}] \end{aligned}$$

colocando  $m - n = b$  e reescrevendo a desigualdade obtêm-se

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= \alpha^{n-1} d(x_1, x_2) [1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{b-1}] \\ &\leq \alpha^{n-1} d(x_1, x_2) \sum_{b=1}^{\infty} \alpha^{b-1}. \end{aligned}$$

Podemos perceber que

$$\sum_{b=1}^{\infty} \alpha^{b-1}$$

é uma série geométrica com  $\alpha < 1$ , pois  $0 \leq \alpha \leq 1$  e portanto sua soma é dada por

$$S = \frac{1}{1 - \alpha}$$

onde obtemos

$$d(x_n, x_m) \leq \alpha^{n-1} d(x_1, x_2) \frac{1}{1 - \alpha} = \alpha^{n-1} \frac{d(x_1, x_2)}{1 - \alpha}.$$

Pelo fato de  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $\alpha^n \rightarrow 0$  quando  $n$  torna-se suficientemente grande. Portanto  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de Cauchy. Sendo  $X$  um espaço completo, essa sequência converge, ou seja,  $\exists x \in X$  tal que

$$\lim x_n = x.$$

Mostremos então que  $x$  é um ponto fixo de  $T$ , ou seja que  $T(x) = x$ . Temos

$$d(T(x), x_{n+1}) = d(T(x), T(x_n)) \leq \alpha d(x, x_n)$$

e como  $d(x, x_n)$  tende a zero segue que

$$\lim x_n = T(x)$$

e pela unicidade do limite,  $T(x) = x$ .

Desta forma,  $d(x, T(x)) = 0$  o que resulta em  $T(x) = x$ . A unicidade de  $x$  é garantida pelo lema (19).  $\square$

## 5 Aplicações

### 5.1 Aplicações em Equações Numéricas

Primeiro iremos mostrar que  $x = \alpha \cos x$ ,  $0 < \alpha < 1$ , possui solução no conjunto dos reais e ela é uma solução única. Seja  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $T(x) = \alpha \cos x$ . Então

$$\begin{aligned} d(T(x), T(y)) &= |T(y) - T(x)| \\ &= |\alpha \cos x - \alpha \cos y| \\ &= \alpha |\cos x - \cos y| \\ &= \alpha \left| \int_y^x \text{sen } k dk \right| \\ &\leq \alpha \int_y^x |\text{sen } k| dk \\ &\leq \alpha \int_y^x dk \\ &= \alpha(x - y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \alpha|x - y| \\ &= \alpha d(x, y). \end{aligned}$$

Então  $T$  é uma contração. Como  $\mathbb{R}$  é completo, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach  $\exists x \in \mathbb{R}$  tal que  $T(x) = x$ , ou seja,  $x = \alpha \cos x$  e essa solução é única.

O resultado fornece um método iterativo para obtermos a solução numérica de determinados tipos de equação. Se fizermos  $\alpha = \frac{1}{2}$  e tomarmos  $x_0 = 0$ , temos

$$\begin{aligned} x_1 &= T(0) = \frac{1}{2} \cos(0) = \frac{1}{2} \\ x_2 &= T\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,438791 \\ x_3 &= T(0,438791) = \frac{1}{2} \cos(0,438791) \approx 0,452632 \\ x_4 &= T(0,452632) = \frac{1}{2} \cos(0,452632) \approx 0,449649 \\ x_5 &= T(0,449649) = \frac{1}{2} \cos(0,449649) \approx 0,450299 \\ x_6 &= T(0,450299) = \frac{1}{2} \cos(0,450299) \approx 0,450158 \\ x_7 &= T(0,450158) = \frac{1}{2} \cos(0,450158) \approx 0,450189 \\ x_8 &= T(0,450189) = \frac{1}{2} \cos(0,450189) \approx 0,450128 \\ x_9 &= T(0,450128) = \frac{1}{2} \cos(0,450128) \approx 0,450183 \\ x_{10} &= T(0,450183) = \frac{1}{2} \cos(0,450183) \approx 0,450183 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Repetindo o processo várias vezes encontramos um valor aproximado da solução desse problema.

Sabemos que  $f(x) = \cos x$  não é uma contração em  $\mathbb{R}$ . Portanto o Teorema de Banach não garante a existência de um ponto fixo em tais condições, mas nada nos impede de aplicarmos tal método na busca de uma solução para a equação  $\cos x = x$ .

Novamente tomando  $x_0 = 0$ , temos

$$\begin{aligned} x_1 &= T(0) = \cos(0) = 1 \\ x_2 &= T(1) = \cos(1) \approx 0,540302 \\ x_3 &= T(0,540302) = \cos(0,540302) \approx 0,857553 \\ x_4 &= T(0,857553) = \cos(0,857553) \approx 0,654289 \\ x_5 &= T(0,654289) = \cos(0,654289) \approx 0,793480 \\ x_6 &= T(0,793480) = \cos(0,793480) \approx 0,701369 \\ x_7 &= T(0,701369) = \cos(0,701369) \approx 0,763959 \\ x_8 &= T(0,763959) = \cos(0,763959) \approx 0,722102 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_9 &= T(0, 722102) = \cos(0, 722102) \approx 0, 750418 \\x_{10} &= T(0, 750418) = \cos(0, 750418) \approx 0, 731403 \\x_{11} &= T(0, 731403) = \cos(0, 731403) \approx 0, 744238 \\x_{12} &= T(0, 744238) = \cos(0, 744238) \approx 0, 735604 \\x_{13} &= T(0, 735604) = \cos(0, 735604) \approx 0, 741425 \\x_{14} &= T(0, 741425) = \cos(0, 741425) \approx 0, 737506 \\x_{15} &= T(0, 737506) = \cos(0, 737506) \approx 0, 740147 \\x_{16} &= T(0, 740147) = \cos(0, 740147) \approx 0, 738369 \\x_{17} &= T(0, 738369) = \cos(0, 738369) \approx 0, 739567 \\x_{18} &= T(0, 739567) = \cos(0, 739567) \approx 0, 738760 \\x_{19} &= T(0, 738760) = \cos(0, 738760) \approx 0, 739304 \\x_{20} &= T(0, 739304) = \cos(0, 739304) \approx 0, 738937 \\x_{21} &= T(0, 738937) = \cos(0, 738937) \approx 0, 739184 \\&\vdots\end{aligned}$$

Quanto mais iterações fizermos mais nos aproximamos de um ponto fixo, mesmo  $f$  não sendo uma contração. Isso acontece pelo fato de  $g(x) = \cos(\cos x)$  ser uma contração em  $\mathbb{R}$ . Assim, não lidamos com contração apenas na primeira iteração, pois a partir da segunda temos um caso que se encaixa perfeitamente no lema (20), e esse é o real motivo da aproximação do ponto fixo a partir de iterações. De fato  $g(x) = \cos(\cos(x))$  é uma contração em  $\mathbb{R}$ , pois

$$|g'(x)| = |\text{sen}(\cos x) \cdot \text{sen } x| = |\text{sen}(\cos x)| \cdot |\text{sen } x|.$$

Sabendo que

$$|\text{sen } u| \leq |u| \quad \text{e} \quad \text{sen } 2x = 2 \text{sen } x \cos x,$$

então

$$\begin{aligned}|\text{sen}(\cos x)| \cdot |\text{sen } x| &\leq |\cos x| \cdot |\text{sen } x| \\&= |\cos x \text{sen } x| \\&= \left| \frac{\text{sen } 2x}{2} \right| = \frac{1}{2} |\text{sen } 2x| \leq \frac{1}{2},\end{aligned}$$

ou seja,

$$|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

e como vimos no lema (21), essa derivada é limitada por  $c = \frac{1}{2} < 1$ . Sendo assim  $g(x) = \cos(\cos x)$  é contração em  $\mathbb{R}$ .

## 5.2 Aplicações em Equações Diferenciais

As aplicações mais interessantes do Teorema do Ponto Fixo de Banach surgem em espaços de funções, pois seu resultado garante a existência e unicidade de soluções de equações diferen-

ciais e integrais. Focaremos na equação diferencial ordinária de primeira ordem dada por

$$x' = f(t, x) \quad (1)$$

sujeita a uma condição inicial que a torna um problema de valor inicial (PVI) dada por

$$x(t_0) = x_0. \quad (2)$$

Usaremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach para provar o Teorema de Picard, convertendo a equação diferencial (1) em uma equação integral que definirá  $T$ , uma contração com um único ponto fixo que será solução para nosso PVI. Para essa demonstração faremos uso do Teorema Fundamental do Cálculo, disponível em Leithold (1994).

**Teorema 24.** *Seja  $f$  uma função contínua em um retângulo  $R = \{(t, x); |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$  e dessa forma, limitada em  $R$*

$$|f(t, x)| \leq c, \forall (t, x) \in R. \quad (3)$$

*Suponha que exista uma constante  $k$  tal que, para  $(t, x), (t, v) \in \mathbb{R}$ ,*

$$|f(t, x) - f(t, v)| \leq k|x - v|, \quad (4)$$

*ou seja,  $f$  satisfaz a condição de Lipchitz em  $R$  para seu segundo argumento. Desta forma, o PVI tem uma única solução. Esta solução está no intervalo  $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ , onde*

$$\beta < \min \left\{ a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k} \right\}. \quad (5)$$

*Prova.* Seja  $C(J)$  o espaço métrico (completo) de todas as funções contínuas de valores reais no intervalo  $J = [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$  com métrica  $d$  definida por

$$d(x, y) = \max_{t \in J} \{|x(t) - y(t)|\}.$$

Seja, então  $\bar{C}$  um subespaço de  $C(J)$  formado por todas as funções  $x \in C(J)$  que satisfazem

$$|x(t) - x_0| \leq c\beta.$$

Nesses termos,  $\bar{C}$  é fechado em  $C(J)$ . De fato, suponha que para  $x_n \in \bar{C}, x_n \rightarrow x$ , então

$$\begin{aligned} |x(t) - x_0| &= \lim_{n \rightarrow \infty} |x(t) - x_0| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |x(t) - x_n(t) + x_n(t) - x_0| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} |x(t) - x_n(t)| + \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n(t) - x_0| \\ &\leq 0 + \lim_{n \rightarrow \infty} c\beta. \end{aligned}$$

Assim,  $x \in \bar{C}$  e  $\bar{C}$  é fechado. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo vemos que (1) e (2) podem ser escritas por  $x = T(x)$ , onde  $T : \bar{C} \rightarrow \bar{C}$ , bem definida para todo  $x \in \bar{C}$ , é dada por

$$[T(x)](t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\alpha, x(\alpha)) d\alpha \quad (6)$$

mas, é preciso que (i) a integral (6) exista e (ii) para qualquer  $x \in \bar{C}$  temos que  $T(x) \in \bar{C}$ .

(i) De fato, para  $\alpha \in J$  e  $x(\alpha) \in \bar{C}$ , como  $c\beta < b$  e  $\beta < a$ , qualquer que seja o mínimo em (5), temos

$$\begin{aligned} \alpha \in J &\Rightarrow t_0 - \beta \leq \alpha \leq t_0 + \beta \\ &\Rightarrow t_0 - a \leq t_0 - \beta \leq \alpha \leq t_0 + \beta \leq t_0 + a \\ &\Rightarrow t_0 - a \leq \alpha \leq t_0 + a \\ &\Rightarrow |\alpha - t_0| \leq a. \end{aligned}$$

Por outro lado, se  $x \in \bar{C}$  então  $|x(\alpha) - x_0| \leq c\beta < b$ . Assim,  $(\alpha, x(\alpha)) \in R$  fazendo com que a integral (6) exista pelo fato de  $f$  ser contínua em  $R$ .

(ii) De (3) e (6), obtemos

$$\begin{aligned} |[T(x)](t) - x_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(\alpha, x(\alpha)) d\alpha \right| \\ &\leq c \int_{t_0}^t d\alpha \\ &\leq c|t - t_0| \leq c\beta. \end{aligned}$$

Assim,  $T(x) \in \bar{C}$ . Agora precisamos provar que  $T$  é, de fato, uma contração em  $\bar{C}$ .

Então, pela condição (4), temos

$$\begin{aligned} |[T(x)](t) - [T(v)](t)| &= \left| (x_0 + \int_{t_0}^t f(\alpha, x(\alpha)) d\alpha) - (x_0 + \int_{t_0}^t f(\alpha, v(\alpha)) d\alpha) \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(\alpha, x(\alpha)) - f(\alpha, v(\alpha))| d\alpha \\ &\leq k \int_{t_0}^t |x(\alpha) - v(\alpha)| d\alpha \\ &\leq k \int_{t_0}^t \max_{\alpha \in J} \{|x(\alpha) - v(\alpha)|\} d\alpha \\ &\leq k|t - t_0| \max_{\alpha \in J} \{|x(\alpha) - v(\alpha)|\} \\ &\leq k\beta d(x, v) \end{aligned}$$

o que implica em  $d(T(x), T(v)) \leq \alpha d(x, v)$ , onde, por (5),  $\alpha = k\beta < 1$ . Assim fica provado que  $T$  é uma contração pois  $\alpha < 1$ . Dessa maneira temos que, pelo Teorema do Ponto fixo de Banach,  $T$  possui um único ponto fixo  $x \in \bar{C}$ , isto é, uma função  $x \in C(J)$  que satisfaz  $x = T(x)$ . Por (6), temos que

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\alpha, x(\alpha)) d\alpha. \quad (7)$$

Como  $(\alpha, x(\alpha)) \in R$  em que  $f$  é contínua, novamente pelo Teorema Fundamental do Cálculo, disponível em Leithold (1994), a expressão (7) pode ser diferenciada. Desta forma,  $x$  é diferenciável satisfazendo (1).  $\square$

### 5.3 Aplicações em Equações Integrais

A equação integral da forma

$$x(t) - \mu \int_a^b k(t, \tau)x(\tau)d\tau = v(t) \quad (8)$$

é chamada de Equação de Fredholm de segunda espécie. Aqui  $[a, b]$  é um intervalo dado,  $x$  é uma função em  $[a, b]$  e  $\mu$  é um parâmetro. O núcleo  $k$  da equação é uma função definida no quadrado  $G : [a, b] \times [a, b]$  e  $v$  é uma função definida em  $[a, b]$ .

Equações integrais podem ser consideradas em vários espaços de funções, mas aqui consideraremos (8) em  $C[a, b]$ , onde tomamos  $J = [a, b]$  e definimos, para  $x, y \in C[a, b]$ ,

$$d(x, y) = \max_{t \in J} \{|x(t) - y(t)|\}. \quad (9)$$

**Teorema 25.** (Equação Integral de Fredholm) *Suponha que  $k$  e  $v$  em (8) são contínuas em  $J \times J$  e  $J$  respectivamente, e assumamos que  $\mu$  satisfaz  $|\mu| < \frac{1}{c(b-a)}$ , sendo  $c$  a constante que limita a função  $k$ . Assim, (8) possui solução única  $x$  definida em  $J$ . Esta função  $x$  é o limite da sequência iterativa  $(x_0, x_1, \dots)$ , onde  $x_0$  é qualquer função em  $C(J)$ .*

*Prova.* Para aplicarmos o Teorema do Ponto Fixo de Banach é importante notar que  $C[a, b]$  é completo se equipado com a métrica do supremo. Sendo  $v$  e  $k$  contínuas, então  $k$  é uma função limitada em  $G$ , pois é contínua num compacto, digamos

$$|k(t, \tau)| \leq c, \forall (t, \tau) \in G. \quad (10)$$

Temos que (8) pode ser escrita por  $x = T(x)$ , onde

$$[T(x)](t) = v(t) + \mu \int_a^b k(t, \tau)x(\tau)d\tau. \quad (11)$$

Visto que  $v$  e  $k$  são contínuas e  $x \in C[a, b]$ , (11) define o operador  $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ . Mostraremos agora que  $T$  é uma contração. De (9) e (11) temos

$$\begin{aligned} d(T(x), T(y)) &= \max_{t \in J} \{|[T(x)](t) - [T(y)](t)|\} \\ &= \max_{t \in J} \left\{ \left| (v(t) + \mu \int_a^b k(t, \tau)x(\tau)d\tau) - (v(t) + \mu \int_a^b k(t, \tau)y(\tau)d\tau) \right| \right\} \\ &= \max_{t \in J} \left\{ \left| \mu \int_a^b k(t, \tau)[x(\tau) - y(\tau)]d\tau \right| \right\} \\ &= |\mu| \max_{t \in J} \left\{ \left| \int_a^b k(t, \tau)[x(\tau) - y(\tau)]d\tau \right| \right\} \\ &\leq |\mu| \max_{t \in J} \left\{ \int_a^b |k(t, \tau)||x(\tau) - y(\tau)|d\tau \right\} \\ &\leq |\mu| \max_{t \in J} \left\{ \int_a^b c|x(\tau) - y(\tau)|d\tau \right\} \\ &= |\mu| \int_a^b c|x(\tau) - y(\tau)|d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq |\mu|c \int_a^b \max_{\omega \in J} \{|x(\omega) - y(\omega)|\} d\tau \\ &= |\mu|c \max_{\omega \in J} \{|x(\omega) - y(\omega)|\} \int_a^b d\tau = |\mu|cd(x, y)(b - a). \end{aligned}$$

Esta desigualdade pode ser escrita por  $d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y)$ , onde

$$\alpha = |\mu|c(b - a) < 1,$$

devido à condição  $|\mu| < \frac{1}{c(b-a)}$ , e assim  $T$  é contração. Portanto, pelo teorema do ponto fixo de Banach, a equação de Fredholm possui uma única solução.  $\square$

## Referências

- Caissotti, Teresa. *Teoremas de ponto fixo e algumas aplicações*. 2012. 86f. Dissertação de mestrado. Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa. 2012.
- Ferreira, Marcos dos S. *O Teorema de ponto fixo de Banach e aplicações*. 2008. 61f. Monografia para obtenção do grau de Bacharel em Matemática. Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus. 2008.
- Leithold, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica*. Volume I e II. Harbra, 1994.
- Lima, Elon Lages. *Espaços métricos*, 3a edição. Projeto Euclides, IMPA - Rio de Janeiro, 2003.
- Lima, Elon Lages. *Análise Real*. Projeto Euclides, IMPA - Rio de Janeiro, 2002.
- Stuckless, Tara. *Brouwer's fixed point theorem: Methods of proof and generalizations*. 2003. 78f. Master of Science Thesis. Simon Fraser university, Burnaby. 2003.

## Otimização irrestrita através do método de região de confiança com passo de Cauchy

Guilherme Felipe Schallenberger Schaurich<sup>1</sup>  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
gui\_schau@hotmail.com

Camila Frank Hollmann<sup>1</sup>  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
camila\_frank@hotmail.com

Paulo Domingos Conejo  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
paulo.conejo@unioeste.br

**Resumo:** Otimização irrestrita consiste em encontrar pontos de máximo ou mínimo de uma função, sem nenhuma restrição sobre as variáveis. Este trabalho tem como objetivo o estudo do método de região de confiança com o passo de Cauchy para minimizar uma função. Com este método, a função objetivo é aproximada por um modelo quadrático, que é minimizado dentro da região chamada de região de confiança. O passo de Cauchy é o minimizador do modelo na direção oposta ao gradiente, sendo necessário definir quanto caminhar nessa direção. No entanto, só é aceito quando a redução no modelo também proporciona uma boa redução na função objetivo. Desse modo, é possível provar a convergência do algoritmo, sendo que sua demonstração é apresentada ao final deste trabalho.

**Palavras-chave:** Região de confiança; passo de Cauchy; otimização sem restrições.

### 1 Introdução

Neste trabalho vamos considerar o problema de minimização irrestrita

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & x \in \mathbb{R}^n, \end{array} \quad (1)$$

onde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada e duas vezes continuamente diferenciável em  $\mathbb{R}^n$ .

Usaremos o método de região de confiança para resolver o problema (1), definindo a cada iteração o modelo quadrático  $m_k(d)$ , que é uma aproximação aceitável da função objetivo  $f$  na região em torno do ponto corrente  $x^k$ . Essa região em que confiamos no modelo chamamos de região de confiança. Então minimizaremos o modelo sujeito à região de confiança a fim de se encontrar o próximo passo  $d$ . Se o modelo encontrado é uma aproximação adequada da função objetivo dentro da região de confiança, então o ponto  $x^{k+1} = x^k + d$  é aceito pelo método e

<sup>1</sup>Agradecemos ao CNPq pela bolsa concedida.

a região pode ser aumentada na próxima iteração; por outro lado, se a aproximação é ruim, a região é diminuída e o modelo é minimizado dentro da nova região de confiança. O modelo continua gerando iterações até o momento que o passo  $d$  é aceito.

Então o subproblema é dado por

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && m_k(d) = f(x^k) + (g_k)^T d + \frac{1}{2} d^T H_k d \\ &\text{sujeito a} && \|d\| \leq \Delta_k, \end{aligned} \tag{2}$$

onde  $\Delta_k$  é o raio da região de confiança corrente,  $g_k = \nabla f(x^k) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor gradiente da função objetivo no ponto  $x^k$ ,  $H_k = \nabla^2 f(x^k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é matriz hessiana da função objetivo avaliada no ponto  $x^k$  e  $\|d\|$  é a norma euclidiana em  $d$ . A solução  $d^k$  do subproblema (2) será o passo para obter o próximo ponto para o problema (1),  $x^{k+1} = x^k + d^k$ .

Utilizaremos o passo de Cauchy para resolver o subproblema (2), sendo esse definido como sendo o minimizador do modelo na direção oposta ao gradiente.

## 2 Método de região de confiança

O método de região de confiança utiliza um modelo quadrático que aproxima a função objetivo, e então define uma região em torno do ponto corrente na qual é possível confiar no modelo. Ou seja, definimos quanto podemos caminhar antes de calcular a direção. Com o raio da região definido, calculamos um minimizador aproximado do modelo nesta região. Caso este ponto forneça uma redução também na função objetivo, o ponto é aceito e o processo é repetido, definindo uma região de confiança em torno deste novo ponto corrente. Caso contrário, o raio da região de confiança é reduzido, pois é possível que o modelo não represente adequadamente a função objetivo. Então, procura-se um novo minimizador para o modelo nesta região (RIBEIRO; KARAS, 2010).

Vamos considerar uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ . Dado um ponto  $x^k \in \mathbb{R}^n$ , o modelo quadrático de  $f$  em torno de  $x^k$  é definido por

$$q_k(x) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^T (x - x^k) + \frac{1}{2} (x - x^k)^T B_k (x - x^k), \tag{3}$$

onde  $B_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  pode ser a Hessiana  $\nabla^2 f(x^k)$  ou qualquer outra matriz simétrica tal que  $\|B_k\| \leq \beta$ , para alguma constante  $\beta > 0$ .

O modelo definido em (3) aproxima a função  $f$  em uma vizinhança de  $x^k$ . Sendo  $\Delta_k > 0$  o raio da região de confiança, a região em que confiamos no modelo é  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x^k\| \leq \Delta_k\}$ .

Agora, considere  $d = x - x^k$  e  $m_k(d) = q_k(x^k + d)$ . Temos, então, o subproblema

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && m_k(d) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^T d + \frac{1}{2} (d)^T B_k d \\ &\text{sujeito a} && \|d\| \leq \Delta_k. \end{aligned} \tag{4}$$

No entanto, a solução  $d^k$  de (4) deve ser avaliada, uma vez que o ponto  $x^k + d^k$  deve fornecer uma boa redução na função objetivo.

Vamos definir a redução real na função objetivo como  $ared$  e a redução do modelo como  $pred$ . Logo,

$$\begin{aligned}ared &= f(x^k) - f(x^k + d) \\pred &= m_k(0) - m_k(d).\end{aligned}\tag{5}$$

A razão entre a redução na função objetivo e a redução no modelo é dada por

$$\rho_k = \frac{ared}{pred}.\tag{6}$$

Assim,  $d^k$  será aceito quando  $\rho_k$  for maior que uma constante  $\eta \geq 0$ , o que significa que a redução real na função objetivo corresponde a pelo menos uma fração da redução no modelo. Neste caso, o processo é repetido com o próximo ponto corrente,  $x^{k+1} = x^k + d^k$ . Além disso, se  $d^k$  está na fronteira da região de confiança e a redução na função objetivo é grande, podemos aumentar o tamanho do raio  $\Delta_k$  para a próxima iteração. Se  $d^k$  está dentro da região, consideramos que o raio atual  $\Delta_k$  pode ser mantido na próxima iteração. Observe ainda que caso a função objetivo seja quadrática, o modelo que melhor a aproxima é a própria função, então neste caso teremos  $\rho_k = 1$  e o raio da região de confiança será aumentado. Caso  $\rho_k \leq \eta$ , a redução na função objetivo não foi boa o suficiente e  $d^k$  é recusado. O processo é repetido resolvendo o subproblema (4) com o raio da região de confiança  $\Delta_k$  reduzido (RIBEIRO; KARAS, 2010).

A Figura 1 ilustra uma iteração do método de região de confiança. No gráfico da esquerda o minimizador irrestrito está na fronteira da região de confiança, enquanto no gráfico da direita está dentro da região.

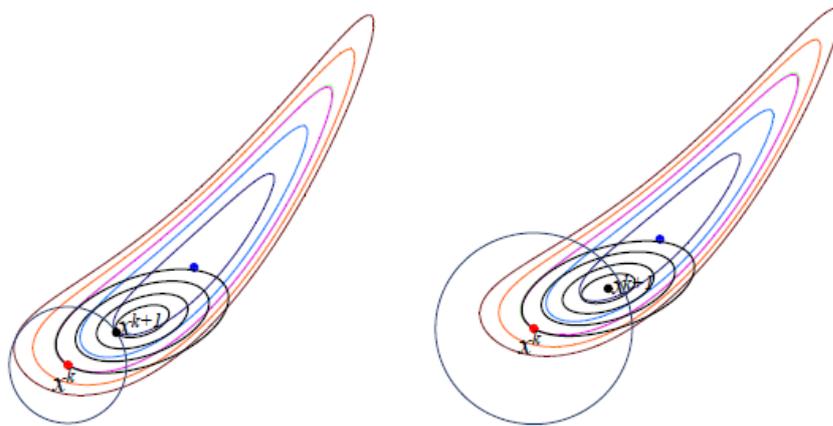


Figura 1: Dois casos possíveis em uma iteração do método (RIBEIRO; KARAS, 2010).

## 2.1 Algoritmo

O algoritmo para o método de região de confiança é definido a seguir (RIBEIRO; KARAS, 2010).

### Algoritmo do método de região de confiança

Dados:  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{\Delta} > 0$ ,  $\Delta_0 \in (0, \bar{\Delta})$ ,  $\eta \in [0, \frac{1}{4})$  e  $\epsilon > 0$

$$k = 0$$

REPITA enquanto  $\|\nabla f(x^k)\| \geq \epsilon$

Obtenha  $d^k$ , solução do subproblema (4)

Calcule  $\rho_k$  usando (6)

SE  $\rho_k > \eta$

$$x^{k+1} = x^k + d^k$$

$$\Delta_{k+1} = \Delta_k$$

SENÃO

$$x^{k+1} = x^k$$

$$\Delta_{k+1} = \frac{\Delta_k}{2}$$

$$k = k + 1$$

### 3 O passo de Cauchy

Muitas vezes, não é possível resolver o subproblema (4) de forma exata. Por isso, definiremos o passo de Cauchy para que seja possível provar a convergência do algoritmo. O passo de Cauchy fornece uma redução do raio  $d^k$  no modelo e é definido como

$$d_c^k = -t_k \nabla f(x^k), \quad (7)$$

ou seja, o passo é definido como sendo o minimizador do modelo na direção oposta ao gradiente. Quanto caminhar nessa direção,  $t_k > 0$ , é a solução do subproblema

$$\begin{aligned} \text{minimizar } & m_k(-t \nabla f(x^k)) = f(x^k) - t \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{1}{2} t^2 \nabla f(x^k)^T B_k \nabla f(x^k) \\ \text{sujeito a } & \|t \nabla f(x^k)\| \leq \Delta_k. \end{aligned} \quad (8)$$

A Figura 2 mostra o ponto de Cauchy em uma iteração  $k$  do método.

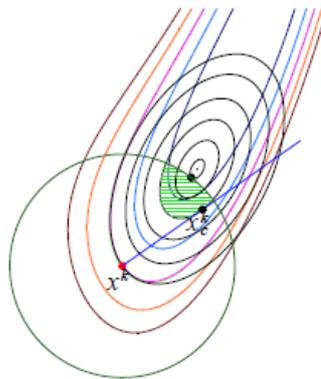


Figura 2: Ponto obtido no passo de Cauchy e pontos melhores do que este (RIBEIRO; KARAS, 2010).

As elipses representam as curvas de nível do modelo  $m_k$  e a área hachurada corresponde ao conjunto de pontos que satisfazem a relação

$$pred \geq m_k(0) - m_k(d_c^k).$$

Essa relação será importante para a análise de convergência do método, uma vez que vamos supor que a solução aproximada do subproblema (4) seja pelo menos tão boa quanto a solução de Cauchy.

**Lema 1.** *O passo de Cauchy, definido em (7), satisfaz*

$$m_k(0) - m_k(d_c^k) \geq \frac{1}{2} \|g_k\| \min \left\{ \Delta_k, \frac{\|g_k\|}{\|B_k\|} \right\},$$

onde  $g_k = \nabla f(x^k) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor gradiente da função objetivo no ponto  $x^k$  e  $B_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  pode ser a Hessiana  $\nabla^2 f(x^k)$  ou qualquer outra matriz simétrica tal que  $\|B_k\| \leq \beta$ , para alguma constante  $\beta > 0$ .

*Prova.* Primeiramente é preciso obter  $t_k$ , solução de (8), ou seja, o minimizador de

$$\xi(t) = f(x^k) - t \|g_k\|^2 + \frac{1}{2} t^2 g_k^T B_k g_k$$

no intervalo  $0 \leq t \leq \frac{\Delta_k}{\|g_k\|}$ . Existem então dois casos:  $g_k^T B_k g_k > 0$  e  $g_k^T B_k g_k \leq 0$ .

(i) Se  $g_k^T B_k g_k > 0$ , então a função  $\xi$  é convexa e tem minimizador irrestrito

$$\bar{t} = \frac{\|g_k\|^2}{g_k^T B_k g_k}. \quad (9)$$

Podem então ocorrer dois subcasos. O primeiro é quando  $\bar{t} \leq \frac{\Delta_k}{\|g_k\|}$ , como ilustrado na Figura 3.

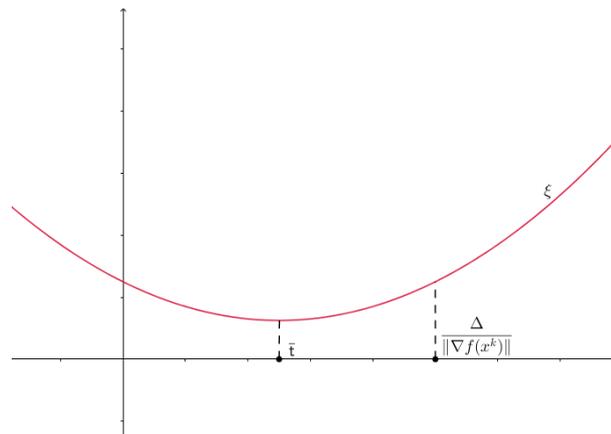


Figura 3: Primeiro subcaso para a função  $\xi$  convexa.

Neste caso temos que  $t_k = \bar{t}$  e assim

$$m_k(0) - m_k(d_c^k) = \frac{1}{2} \frac{\|g_k\|^2}{g_k^T B_k g_k}.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos

$$m_k(0) - m_k(d_c^k) \geq \frac{1}{2} \frac{\|g_k\|^2}{\|B_k\|}. \quad (10)$$

No segundo caso temos  $\bar{t} > \frac{\Delta_k}{\|g_k\|}$  (Figura 4), implicando que o minimizador de  $\xi$  está na fronteira.

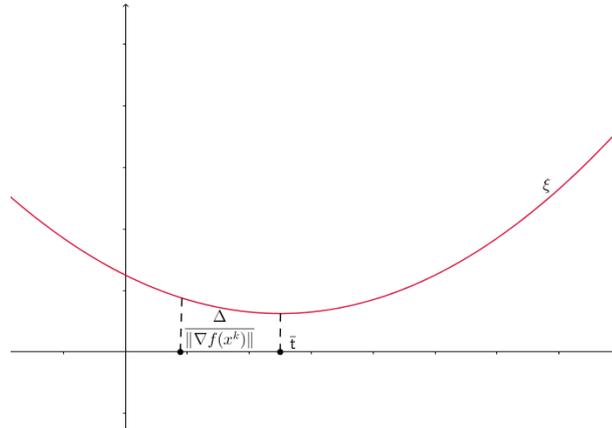


Figura 4: Segundo subcaso para a função  $\xi$  convexa.

Portanto, usando (9), obtemos

$$t_k = \frac{\Delta_k}{\|g_k\|} < \frac{\|g_k\|^2}{g_k^T B_k g_k}, \quad (11)$$

que implica em

$$t_k^2 g_k^T B_k g_k < t_k \|g_k\|^2 = \|g_k\| \Delta_k.$$

Assim,

$$m_k(d_c^k) < f(x^k) - \|g_k\| \Delta_k + \frac{1}{2} \|g_k\| \Delta_k = f(x^k) - \frac{1}{2} \|g_k\| \Delta_k,$$

donde segue que

$$m_k(0) - m_k(d_c^k) > \frac{1}{2} \|g_k\| \Delta_k. \quad (12)$$

(ii) Se  $g_k^T B_k g_k \leq 0$ , então

$$m_k(d_c^k) = f(x^k) - t_k \|g_k\|^2 + \frac{1}{2} t_k^2 g_k^T B_k g_k \leq f(x^k) - t_k \|g_k\|^2. \quad (13)$$

Neste caso a função  $\xi$  é decrescente para  $t \geq 0$  (Figura 5) e assim o ponto de Cauchy também está na fronteira da região de confiança, isto é,  $t_k = \frac{\Delta_k}{\|g_k\|}$ .

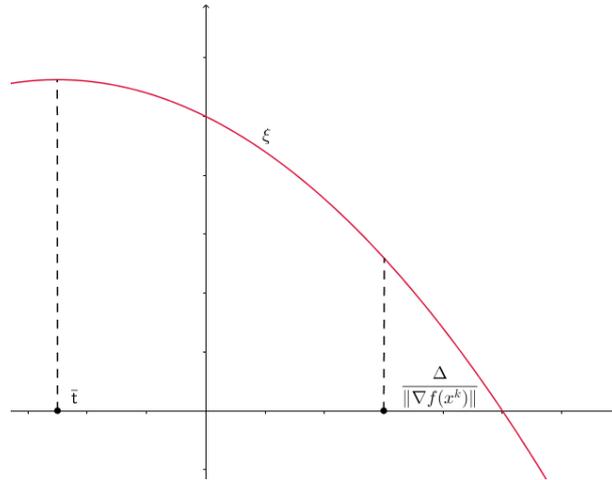


Figura 5: Caso para a função  $\xi$  côncava.

Assim, por (13),

$$m_k(0) - m_k(d_c^k) \geq \|g_k\| \Delta_k \geq \frac{1}{2} \|g_k\| \Delta_k. \quad (14)$$

De (10), (12) e (14) segue que

$$m_k(0) - m_k(d_c^k) \geq \frac{1}{2} \|g_k\| \min \left\{ \Delta_k, \frac{\|g_k\|}{\|B_k\|} \right\},$$

demonstrando o resultado. □

## 4 Convergência do método

Vamos provar a convergência do método de região de confiança supondo que o algoritmo gera uma sequência infinita  $(x^k)$  em  $\mathbb{R}^n$  e que as seguintes hipóteses estejam satisfeitas.

**H1** A função objetivo é de classe  $C^1$ , com  $\nabla f$  Lipschitz, ou seja,  $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L \|x - y\|$ , para uma constante  $L \geq 0$ .

**H2** A solução aproximada  $d^k$  de (4) satisfaz

$$pred = m_k(0) - m_k(d^k) \geq c_1 \|\nabla f(x^k)\| \min \left\{ \Delta_k, \frac{\|\nabla f(x^k)\|}{\|B_k\|} \right\},$$

onde  $c_1 \geq 0$  é uma constante. Comparando com o Lema 1, vemos que esta hipótese significa obter um passo  $d^k$  tal que a redução no modelo seja proporcional à redução obtida pelo passo de Cauchy.

**H3** O passo  $d^k$  satisfaz  $\|d^k\| \leq \gamma \Delta_k$ , para alguma constante  $\gamma \geq 1$ . Isto significa que o passo pode ser maior do que o raio da região de confiança, desde que seja menor do que um múltiplo fixo deste.

**H4** A função  $f$  é limitada inferiormente no conjunto de nível

$$N = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq f(x^0)\}.$$

**H5** As Hessianas  $B_k$  são uniformemente limitadas, isto é, existe uma constante  $\beta > 0$  tal que  $\|B_k\| \leq \beta$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 2** (Teorema do valor médio). *Seja  $f : \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  diferenciável no conjunto aberto  $\mathbb{U}$  e  $[a, a + h] \subseteq \mathbb{U}$  um segmento de reta na direção do vetor  $h \in \mathbb{R}^n$ . Então existe  $\theta_k \in (0, 1)$  tal que*

$$f(a + h) - f(a) = \nabla f(a + \theta_k h)h.$$

A demonstração do Teorema 2 pode ser encontrada em Lima (2004).

**Lema 3.** *Suponha que sejam satisfeitas as Hipóteses H1-H5. Então existe uma constante  $c > 0$  tal que*

$$|\rho_k - 1| \leq \frac{c\Delta_k^2}{\|\nabla f(x^k)\| \min \left\{ \Delta_k, \frac{\|\nabla f(x^k)\|}{\beta} \right\}}.$$

*Prova.* Pelo Teorema 2, tomando os pontos  $a = x^k$  e  $h = d^k$  temos, para uma constante  $\theta_k \in (0, 1)$ ,

$$f(x^k + d^k) = f(x^k) + \nabla f(x^k + \theta_k d^k)^T d^k.$$

Utilizando *ared* e *pred* como definidos em (5),

$$ared - pred = f(x^k) - f(x^k + d^k) - [m_k(0) - m_k(d^k)]$$

Substituindo  $f(x^k + d^k)$  como calculado, obtemos

$$\begin{aligned} ared - pred &= \frac{1}{2}(d^k)^T B_k d^k - [\nabla f(x^k + \theta_k d^k) - \nabla f(x^k)]^T d^k \Rightarrow \\ |ared - pred| &= \left\| \frac{1}{2}(d^k)^T B_k d^k \right\| - \left\| [\nabla f(x^k + \theta_k d^k) - \nabla f(x^k)]^T d^k \right\|. \end{aligned}$$

Agora, pela Hipótese H1, temos

$$\left\| \nabla f(x^k + \theta_k d^k) - \nabla f(x^k) \right\| \leq L \left\| x^k + \theta_k d^k - x^k \right\| = L \left\| \theta_k d^k \right\|.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |ared - pred| &= \left\| \frac{1}{2}(d^k)^T B_k d^k \right\| - \left\| [\nabla f(x^k + \theta_k d^k) - \nabla f(x^k)]^T d^k \right\| \Rightarrow \\ |ared - pred| &\leq \left\| \frac{1}{2}(d^k)^T B_k d^k \right\| - L \left\| \theta_k d^k \right\| \left\| d^k \right\|. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, que afirma que  $\|u^T v\| \leq \|u\| \|v\|$ , para  $u, v \in \mathbb{R}^n$ , temos

$$|ared - pred| \leq \frac{1}{2} \left\| d^k \right\| \left\| B_k \right\| \left\| d^k \right\| - L \theta_k \left\| d^k \right\| \left\| d^k \right\|.$$

Das Hipóteses H3 e H5, respectivamente, temos  $\|d^k\| \leq \gamma\Delta_k$  e  $\|B_k\| \leq \beta$ . Logo,

$$\begin{aligned} |ared - pred| &\leq \frac{1}{2}\beta(\gamma\Delta_k)^2 - L\theta_k(\gamma\Delta_k)^2 \Rightarrow \\ |ared - pred| &\leq \left(\frac{1}{2}\beta\gamma^2 - L\theta_k\gamma^2\right)\Delta_k^2 \Rightarrow \\ |ared - pred| &\leq c_0\Delta_k^2, \end{aligned}$$

para uma constante  $c_0 > 0$ .

Sabendo que  $\rho_k = \frac{ared}{pred}$ , como definido em (6), temos que  $|\rho_k - 1| = \left|\frac{ared - pred}{pred}\right|$ . Substituindo  $|ared - pred|$  como calculado acima, utilizando a Hipótese H2 e sendo  $c = \frac{c_0}{c_1}$ , temos

$$\begin{aligned} |\rho_k - 1| &\leq \frac{c_0\Delta_k^2}{c_1\|\nabla f(x^k)\| \min\left\{\Delta_k, \frac{\|\nabla f(x^k)\|}{\|B_k\|}\right\}} \Rightarrow \\ |\rho_k - 1| &\leq \frac{c\Delta_k^2}{\|\nabla f(x^k)\| \min\left\{\Delta_k, \frac{\|\nabla f(x^k)\|}{\beta}\right\}}. \end{aligned}$$

□

**Teorema 4.** *Suponha que sejam satisfeitas as Hipóteses H1-H5. Então*

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f(x^k)\| = 0.$$

*Prova.* Suponha por absurdo que a afirmação do enunciado é falsa. Então existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\|\nabla f(x^k)\| > \epsilon$ .

Seja  $\tilde{\Delta} = \min\left\{\frac{\epsilon}{\beta}, \frac{\epsilon}{2c}\right\}$ , com  $\beta$  e  $c$  sendo as constantes do Lema 3. Se  $\Delta_k \leq \tilde{\Delta}$ , temos, por consequência,

$$\Delta_k \leq \frac{\epsilon}{\beta} \leq \frac{\|\nabla f(x^k)\|}{\beta} \text{ e } \Delta_k \leq \frac{\epsilon}{2c}.$$

Pelo Lema 3,

$$\begin{aligned} |\rho_k - 1| &\leq \frac{c\Delta_k^2}{\|\nabla f(x^k)\| \min\left\{\Delta_k, \frac{\|\nabla f(x^k)\|}{\beta}\right\}} \Rightarrow \\ |\rho_k - 1| &\leq \frac{c\Delta_k^2}{\|\nabla f(x^k)\| \Delta_k} \Rightarrow \\ |\rho_k - 1| &\leq \frac{c\Delta_k}{\epsilon} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \\ \rho_k &\geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Portanto,  $\Delta_{k+1} \geq \Delta_k$ , pois, pelo algoritmo do método de região de confiança, o raio da região de confiança é mantido do mesmo tamanho ou aumentado quando  $\rho_k \geq \frac{1}{4}$ .

O raio é reduzido somente se  $\Delta_k > \tilde{\Delta}$ , e temos  $\Delta_{k+1} = \frac{\Delta_k}{2} > \frac{\tilde{\Delta}}{2}$ . Então,

$$\Delta_k \geq \min \left\{ \Delta_0, \frac{\tilde{\Delta}}{2} \right\} \quad (15)$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Agora, considere o conjunto

$$\kappa = \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \rho_k \geq \frac{1}{4} \right\}.$$

Sendo  $\rho_k = \frac{ared}{pred} \geq \frac{1}{4}$ , então  $ared \geq \frac{1}{4}pred$ . Dado  $k \in \kappa$ , pelo algoritmo e pela Hipótese H2, temos

$$\begin{aligned} f(x^k) - f(x^{k+1}) &= f(x^k) - f(x^k + d^k) = ared \Rightarrow \\ f(x^k) - f(x^{k+1}) &\geq \frac{1}{4}pred \Rightarrow \\ f(x^k) - f(x^{k+1}) &\geq \frac{1}{4}(m_k(0) - m_k(d^k)) \Rightarrow \\ f(x^k) - f(x^{k+1}) &\geq \frac{1}{4} \left( c_1 \|\nabla f(x^k)\| \min \left\{ \Delta_k, \frac{\|\nabla f(x^k)\|}{\|B_k\|} \right\} \right) \Rightarrow \\ f(x^k) - f(x^{k+1}) &\geq \frac{1}{4}c_1\epsilon \min \left\{ \Delta_k, \frac{\epsilon}{\beta} \right\}. \end{aligned}$$

De (15), podemos concluir que existe uma constante  $\tilde{\delta} > 0$  tal que

$$f(x^k) - f(x^{k+1}) \geq \tilde{\delta}, \quad (16)$$

para todo  $k \in \kappa$ . No entanto, a sequência  $(f(x^k))$  é não crescente e, por H4, limitada inferiormente. Portanto,  $f(x^k) - f(x^{k+1}) \rightarrow 0$ . Assim, de (16), concluímos que o conjunto  $\kappa$  é finito. Logo,  $\rho_k < \frac{1}{4}$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  suficientemente grande e  $\Delta_k$  será reduzido em cada iteração, o que implica que  $\Delta_k \rightarrow 0$ , contradizendo (16) e provando a afirmação do teorema.  $\square$

**Teorema 5.** *Suponha que sejam satisfeitas as Hipóteses H1-H5. Então*

$$\nabla f(x^k) \rightarrow 0.$$

*Prova.* Suponha por absurdo que o conjunto

$$\kappa = \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \|\nabla f(x^k)\| \geq \epsilon \right\}$$

seja infinito para algum  $\epsilon > 0$ . Pelo Teorema 4, existe  $l_k > k$ ,  $k \in \kappa$ , tal que  $\|\nabla f(x^{l_k})\| \leq \frac{\epsilon}{2}$ . Agora, por H1, temos

$$\frac{\epsilon}{2} \leq \|\nabla f(x^k) - \nabla f(x^{l_k})\| \leq L \|x^k - x^{l_k}\|.$$

Seja  $S_k = \{j \in \mathbb{N} \mid k \leq j < l_k \text{ e } x^{j+1} \neq x^j\}$ . Então, utilizando H3, temos

$$\frac{\epsilon}{2L} \leq \|x^k - x^{l_k}\| \leq \sum_{j \in S_k} \|x^j - x^{j+1}\| \leq \sum_{j \in S_k} \gamma \Delta_j. \quad (17)$$

Utilizando o algoritmo do método de região de confiança, de onde temos  $ared > \eta pred$ , as Hipótese H2 e H5, a definição de  $l_k$  e a desigualdade (17), obtemos

$$\begin{aligned} f(x^k) - f(x^{l_k}) &= \sum_{j \in S_k} (f(x^j) - f(x^{j+1})) \Rightarrow \\ f(x^k) - f(x^{l_k}) &\geq \sum_{j \in S_k} \eta(m_j(0) - m_j(d^j)) \Rightarrow \\ f(x^k) - f(x^{l_k}) &\geq \sum_{j \in S_k} \eta c_1 \|\nabla f(x^j)\| \min \left\{ \Delta_j, \frac{\|\nabla f(x^j)\|}{\|B_j\|} \right\} \Rightarrow \\ f(x^k) - f(x^{l_k}) &\geq \sum_{j \in S_k} \eta c_1 \epsilon \min \left\{ \Delta_j, \frac{\epsilon}{\beta} \right\} \Rightarrow \\ f(x^k) - f(x^{l_k}) &\geq \min \left\{ \frac{\eta c_1 \epsilon^2}{2\gamma L}, \frac{\eta c_1 \epsilon^2}{\beta} \right\}. \end{aligned}$$

Definindo  $\tilde{\delta} = \min \left\{ \frac{\eta c_1 \epsilon^2}{2\gamma L}, \frac{\eta c_1 \epsilon^2}{\beta} \right\}$ , vemos que

$$f(x^k) - f(x^{l_k}) \geq \tilde{\delta}, \tag{18}$$

para todo  $k \in \kappa$ . No entanto, a sequência  $(f(x^k))$  é não crescente e, pela Hipótese H4, limitada inferiormente. Portanto,  $f(x^k) - f(x^{k+1}) \rightarrow 0$ , contradizendo (18), logo a afirmação do teorema é verdadeira.  $\square$

O Teorema 5 garante que todo ponto de acumulação de uma sequência  $x^k$  gerada pelo algoritmo de região de confiança do item 2.1 é estacionário. Pela continuidade de  $\nabla f$ , se  $x^k \rightarrow \bar{x}$ , então  $\nabla f(x^k) \rightarrow \nabla f(\bar{x})$ . Como o Teorema 5 afirma que  $\nabla f(x^k) \rightarrow 0$ , vemos que  $\nabla f(\bar{x}) = 0$ . Portanto, está provada a convergência global do algoritmo do método de região de confiança mostrado anteriormente.

## Referências

- LIMA, Elon Lages. **Análise real**. Rio de Janeiro: IMPA, 2004. Vol. 2.  
 RIBEIRO, Ademir Alves; KARAS, Elizabeth Wegner. **Otimização contínua: Aspectos teóricos e computacionais**. São Paulo: Cengage Learning, 2013.



## Aplicação da transformada de Laplace em equações diferenciais a coeficientes não constantes

Jean Carlos Gibbert<sup>1</sup>  
UNIOESTE - Cascavel  
jean\_gibbert@hotmail.com

Andréia Büttner Ciani  
UNIOESTE - Cascavel  
andbciani@gmail.com

**Resumo:** A transformação de uma função em outra é um processo comum na solução de problemas matemáticos. Neste trabalho foi proposto a aplicação da transformada de Laplace em equações diferenciais a coeficientes não constantes e verificou-se que é um método funcional e prático quando já conhecida as principais transformadas. Um exemplo é a resolução da Equação de Airy, cuja solução é conhecida por meio somatório de potências, sendo apresentada aqui a mesma solução, porém, com um procedimento diferente, através de um somatório de potências negativas.

**Palavras-chave:** Transformada de Laplace; Equações Diferenciais; Coeficientes não constantes.

### 1 Introdução, definições e propriedades da transformada de Laplace

Muitos problemas práticos de engenharia envolvem sistemas mecânicos ou elétricos sob a ação de forças descontínuas ou de impulsos. Alguns métodos de solução para equações diferenciais são, muitas vezes, complicados de se usar. Um método que pode ser usado de maneira mais prática baseia-se na transformada de Laplace.

Conforme Boyce e Diprima, a transformada de Laplace tem esse nome em homenagem ao eminente matemático francês P. S. Laplace, que estudou transformações lineares em 1782. No entanto, as técnicas a serem apresentadas neste capítulo só foram desenvolvidas em torno de um século depois. Elas se devem, principalmente, a Oliver Heaviside (1850-1925).

Uma propriedade que torna a utilização da transformada de Laplace viável para a resolução de equações é a sua linearidade. No caso da derivação, isso significa que, para quaisquer constantes  $\alpha$  e  $\beta$ ,

$$\frac{d}{dx}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \frac{d}{dx}[f(x)] + \beta \frac{d}{dx}[g(x)]. \quad (1)$$

A transformada de Laplace é uma transformada a partir de uma integral imprópria, no intervalo de integração  $[0, +\infty)$ , da própria função multiplicada por uma função exponencial, como se segue.

---

<sup>1</sup>Bolsista do Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME) com bolsa pelo CNPq e Capes.

**Definição 1.** Seja  $f$  uma função definida por  $t \geq 0$ , então a integral

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2)$$

é chamada de transformada de Laplace de  $f$ , desde que a integral convirja.

A transformada apresentada em (2) tem como resultado uma função dependente de outra variável, a variável independente  $s$ . Por isso, na notação  $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ , está-se transformando uma função  $f(t)$  dependente de  $t$  e se obtendo como resultado a função  $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ , dependente de  $s$ .

Para a aplicação da transformada como um operador linear deve ser verificado a sua linearidade:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} [\alpha f(t) + \beta g(t)] dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-st} [\alpha f(t)] dt + \int_0^{+\infty} e^{-st} [\beta g(t)] dt \\ &= \alpha \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt + \beta \int_0^{+\infty} e^{-st} g(t) dt \\ &= \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}. \end{aligned}$$

**Exemplo 2.** Obter a transformada de Laplace da função  $f(t) = t^n$ .

Seguindo a definição 1, então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t^n\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} t^n dt \\ &= \left. \frac{-e^{-st}}{s} t^n \right|_0^{+\infty} - n \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-st}}{s} t^{n-1} dt \\ &= (0 - 0) + \frac{n}{s} \int_0^{+\infty} e^{-st} t^{n-1} dt \\ &= \frac{n}{s} \mathcal{L}\{t^{n-1}\}(s). \end{aligned}$$

Dessa forma, ao seguir os passos acima, têm-se então que

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n}{s} \mathcal{L}\{t^{n-1}\}(s) = \frac{n(n-1)}{s^2} \mathcal{L}\{t^{n-2}\}(s) = \dots = \frac{n(n-1) \dots 3}{s^{n-1}} \mathcal{L}\{t^1\}(s) = \frac{n!}{s^n} \mathcal{L}\{1\}(s).$$

O último termo  $\mathcal{L}\{1\}(s)$  pode ser facilmente calculado conforme a seguir.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{1\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot 1 dt \\ &= 0 - \left(-\frac{e^0}{s}\right) \\ &= \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Logo, têm-se a seguinte resolução geral para o problema proposto

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}. \quad (3)$$

Deve-se atentar que a função  $f(t)$  é definida para  $t \geq 0$  e que a sua transformada,  $\frac{n!}{s^{n+1}}$ , converge para todo valor de  $s \geq 0$ .

**Exemplo 3.** Obter a transformada de Laplace da função  $f(t) = e^{at}$ .

Seguindo a definição 1, então

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{at}\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{at}dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{(-s+a)t}dt \\ &= \left. \frac{e^{(-s+a)t}}{-s+a} \right|_0^{\infty} \\ &= 0 - \frac{1}{-s+a}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}. \quad (4)$$

Neste problema, dois pontos devem ser notados. Primeiro, se  $s = a$ , então, a transformada de  $e^{at}$  não existe e, além disso, se  $s < a$ , a sua transformada também não existirá, como se pode ver ao se retornar a uma das passagens anteriores,

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \left. \frac{e^{(-s+a)t}}{-s+a} \right|_0^{\infty}.$$

É importante notar que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{(-s+a)t}}{-s+a}$$

só será nulo se  $-s + a < 0$ , ou seja,  $s > a$ . Caso contrário, o seu limite tenderá ao infinito, não se constatando uma transformada de Laplace.

Este fato é utilizado como condição suficiente para a existência da transformada de Laplace para qualquer função  $f(t)$ , bastando provar que a função não ultrapassará alguma função exponencial de ordem  $c$ , quando  $t$  tende ao infinito.

**Exemplo 4.** Obter a transformada de Laplace da função  $g(t) = t^n f(t)$ , onde  $f(t)$  é uma função cuja transformada exista.

Seguindo a definição 1, então

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt$$

Derivando em ambos os lados, obtêm-se,

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds} \int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{+\infty} \frac{d}{ds} e^{-st} f(t) dt \\
 &= - \int_0^{+\infty} e^{-st} t f(t) dt \\
 &= -\mathcal{L}\{t f(t)\}.
 \end{aligned}$$

Acima foi visto o resultado considerando  $n = 1$ . Dessa forma, é possível provar por indução que

$$\frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = -\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \mathcal{L}\{t f(t)\}(s) = \dots = (-1)^{n-1} \frac{d}{ds} \mathcal{L}\{t^{n-1} f(t)\}(s) = (-1)^n \mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s).$$

Logo,

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}\{f(t)\}(s). \tag{5}$$

**Exemplo 5.** Obter a transformada de Laplace da derivada  $n$ -ésima da função  $f(t)$ , onde  $f(t)$  é uma função cuja transformada exista e tal que  $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$  são contínuas em  $[0, +\infty]$ .

Seguindo a definição 1, então

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} f^{(n)}(t) dt \\
 &= e^{-st} f^{(n-1)}(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{+\infty} e^{-st} f^{(n-1)}(t) dt \\
 &= -f^{(n-1)}(0) + s \mathcal{L}\{f^{(n-1)}(t)\}(s).
 \end{aligned}$$

A partir deste resultado, pode-se demonstrar que

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = -f^{(n-1)}(0) - \dots - s^{n-2} f'(0) - s^{n-1} f(0) + s^n \mathcal{L}\{f(t)\}(s). \tag{6}$$

## 2 A transformada inversa de Laplace

Existem várias formas de se obter a transformada inversa de Laplace, como, por exemplo, a transformada de Mellin, porém, aqui será obtido a transformada inversa a partir das transformadas de Laplace já conhecidas, principalmente as apresentadas nos exemplos da seção 1.

Assim como na transformada de Laplace foi denotado

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s),$$

agora, será denotado para o seu inverso

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = f(t),$$

de forma a tornar claro que se obtêm como resultado a função de origem, dependente de  $t$ .

**Teorema 6.** *Seja a função  $f(t)$  cuja transformada de Laplace exista, então*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0.$$

Esse teorema é interessante para que se saiba se é possível encontrar a transformada inversa de alguma função. Por exemplo,

$$F(s) = \frac{1}{s}$$

tende a 0 quando  $s$  tende ao infinito e, de fato, conforme o exemplo 2, a sua transformada inversa é  $f(t) = 1$ . Já para a função

$$F(s) = s,$$

não há o que fazer para encontrar a sua transformada inversa, uma vez que ela não existe.

### 3 Aplicações

A aplicação da transformada de Laplace em equações diferenciais segue um método de ida e volta, ou seja, se aplica a transformada em ambos os lados da equação, que possui como variável independente  $t$ , passando então a se ter uma nova equação diferencial, agora com base na variável independente  $s$ , sendo esta mais simples do que a de origem. Ao se resolver a equação, obtém-se como resultado uma função  $F(s)$ , na qual a transformada inversa será a resolução da equação diferencial de origem, ou seja,  $f(t)$ . Essa metodologia se adapta muito bem para equações diferenciais a coeficientes constantes, o objetivo do trabalho, é analisar a sua aplicação para equações diferenciais cujos coeficientes possam variar. Para se aplicar a transformada nas equações diferenciais é necessário, principalmente, se conhecer os resultados obtidos nos exemplos 4 e 5.

**Exemplo 7.** Encontrar uma solução para a equação diferencial em  $(0, +\infty)$  da equação diferencial a seguir:

$$ty'' + 2y' + ty = 0. \tag{7}$$

Utilizando as equações (5) e (6), obtêm-se

$$\mathcal{L}\{ty''\}(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{y''\}(s) = -\frac{d}{ds}[-y'(0) - sy(0) + s^2Y(s)] = y(0) - 2sY(s) - s^2Y'(s);$$

$$\mathcal{L}\{y'\}(s) = -y(0) + sY(s);$$

$$\mathcal{L}\{ty\}(s) = -Y'(s).$$

Aproveitando-se da linearidade da transformada de Laplace, ao substituir os termos acima na equação diferencial (7), têm-se

$$\mathcal{L}\{ty'' + 2y' + ty\}(s) = [y(0) - 2sY(s) - s^2Y'(s)] + [-y(0) + sY(s)] + [-Y'(s)] = 0 \Rightarrow$$

$$Y'(s)(s^2 + 1) = c,$$

onde  $c = -y(0)$ .

Tem-se então uma equação diferencial de primeira ordem, facilmente resolvida. A equação reescrita fica como a seguir:

$$Y'(s) = \frac{c}{s^2 + 1}.$$

Aplicando a Transformada Inversa de Laplace, então,

$$\begin{aligned} -ty(t) &= -c \operatorname{sen} t \Rightarrow \\ y(t) &= c \cdot \frac{\operatorname{sen} t}{t}. \end{aligned}$$

Esta é, então, uma solução da equação do problema.

**Exemplo 8.** Resolver a Equação de Airy, a qual é uma equação diferencial de segunda ordem definida por

$$y'' - sy = 0, \tag{8}$$

com as condições iniciais  $y(0) = 1$  e  $y'(0) = 0$ .

Fazendo a transformada da equação, conforme as equações (5) e (6), então

$$\begin{aligned} [s^2Y - y(0)s - y'(0)] - [-Y'] &= 0 \\ s^2Y + Y' &= s. \end{aligned} \tag{9}$$

Para que se consiga efetuar a transformada inversa, será utilizado o seguinte somatório para a resolução do problema,

$$Y(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{s^n}.$$

Dessa forma, têm-se o seguinte

$$Y'(s) = - \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{c_n}{s^{n+1}}$$

e

$$s^2Y(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{s^{n-2}} = c_1s + c_2 + \frac{c_3}{s} + \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{c_n}{s^{n-2}} = c_1s + c_2 + \frac{c_3}{s} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{n+3}}{s^{n+1}}.$$

Substituindo os valores na equação (9), então,

$$c_1s + c_2 + \frac{c_3}{s} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{n+3}}{s^{n+1}} - \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{c_n}{s^{n+1}} = s.$$

Através da equação acima pode-se encontrar o valor dos coeficientes, como segue:

$$\begin{aligned}c_1 &= 1 \\c_2 &= 0 \\c_3 &= 0 \\c_{n+3} &= nc_n.\end{aligned}$$

Assim sendo, nota-se que apenas os coeficientes de índice múltiplos de três com resto um possuirão um valor não nulo.

$$\begin{aligned}c_4 &= c_1 \\c_7 &= 4 \cdot c_4 \\c_{10} &= 4 \cdot c_7 \\c_{13} &= 10 \cdot c_{10} \\&\vdots \\c_{3n+1} &= (3n-2)(3n-5) \cdots 10 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 1.\end{aligned}$$

Assim, a solução da transformada fica como

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n-2)(3n-5) \cdots 10 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 1}{s^{3n+1}}.$$

Aplicando a transformada inversa,

$$y(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n-2)(3n-5) \cdots 10 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 1}{(3n)!} t^{3n}$$

ou, ainda,

$$y(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{3n}}{[(3n)(3n-1)] \cdots (9 \cdot 8)(6 \cdot 5)(3 \cdot 2)}.$$

Por fim, tem-se então a solução da equação de Airy.

Aqui um ponto a ser investigado é que, para se chegar a solução, passou-se por um somatório de potências negativas, na qual, o resultado diverge para qualquer valor de  $s$ , porém, a solução encontrada após fazer a transformada inversa é a correta.

## 4 Conclusões

Conclui-se que a Transformada de Laplace é um método eficaz e prático para a resolução de equações diferenciais com coeficientes constantes e também não constantes. Ao longo do trabalho foi-se memorizando as principais transformadas de Laplace e, conseqüentemente, obteve-se uma maior agilidade para a resolução das equações diferenciais estudadas. Considerando a necessidade de se encontrar uma equação que possua a transformada inversa de Laplace, encontrou-se a solução de utilizar o somatório de potências negativas em alguns casos, como por exemplo, na equação de Airy.

## Agradecimentos

Quero dedicar este espaço para agradecer ao CNPq e CAPES pelo apoio e incentivo para me aprofundar no estudo matemático.

## Referências

- BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.**
- LEONARDON, Samanta Zanela. **Transformada de Laplace e Equações Diferenciais Ordinárias a Coeficientes Constantes e Não Constantes.** 2015. 54 f. Monografia (Curso de Matemática). UNIOESTE. Cascavel.

## Equação de Bessel

Bruno Gonçalves<sup>1</sup>

Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
brunomiguel281@gmail.com

Sandro Marcos Guzzo

Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
smguzzo@gmail.com

**Resumo:** Neste trabalho, serão estudados alguns conteúdos necessários para a obtenção da solução da Equação de Bessel. Podemos destacar sequências e séries, equações diferenciais e função Gama. Tomamos atenção especial a Séries de Potência aplicadas à solução de equações diferenciais. Com o conhecimento necessário desses conteúdos então, nosso trabalho foi realizado no sentido de encontrar uma solução para a Equação de Bessel  $x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$  por meio de Séries de Potência. A solução para esta equação é conhecida como Função de Bessel. Depois de encontrada a Função de Bessel, solução da Equação de Bessel, são enunciadas algumas propriedades interessantes dessa função.

**Palavras-chave:** Equação de Bessel; Funções de Bessel.

### 1 Introdução

A Equação de Bessel que é a Equação Diferencial Ordinária  $x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$ . Esta equação possui importância física pois modela vários fenômenos naturais. Foi definida pela primeira vez por Daniel Bernoulli e generalizada e estudada por Friedrich Bessel. Torna-se importante obter uma solução para esta equação, pois, isto ajuda a entender melhor os fenômenos modelados por ela.

A Equação de Bessel é uma EDO linear, porém os coeficientes não são constantes, o que inviabiliza algumas técnicas de solução clássicas para EDOs. Um dos métodos que ainda pode ser usado para a obtenção da solução desta equação é o método baseado em Séries de Potências.

Aplicando esse método de solução encontra-se a função

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + p + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p},$$

chamada de Função de Bessel, solução da Equação de Bessel.

O estudo de alguns temas matemáticos como Série de Potências, EDOs e função Gama são de total importância para que se possa encontrar essa solução. Uma breve introdução a esses assuntos é feita neste trabalho, enunciando definições e teoremas julgados importantes para o estudo da Equação de Bessel.

---

<sup>1</sup>O autor agradece à UNIOESTE pelo apoio financeiro na forma de bolsa de iniciação científica.

## 2 Séries de Potências

Nesta seção recordamos alguns resultados que usaremos a respeito de séries de potência. Não nos deteremos em suas demonstrações mas o leitor interessado poderá encontrá-las em Stewart (2013).

**Definição 1.** Uma série de potências é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

na qual  $c_0, c_1, c_2, c_3, \dots$  são constantes e  $x$  é a variável.

Para cada  $x$  fixado, a série  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$  é uma série de constantes que podemos testar quanto a convergência ou divergência. Uma série de potências pode convergir para alguns valores de  $x$  e divergir para outros valores de  $x$ .

**Definição 2.** A série

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n = c_0 + c_1 (x - a) + c_2 (x - a)^2 + c_3 (x - a)^3 + \dots$$

é chamada uma série de potências em  $(x - a)$  ou uma série de potências centrada em  $a$  ou uma série de potências em torno de  $a$ . Observe que, quando  $x = a$ , todos os termos são 0 para  $n \geq 1$  e assim a série de potências sempre converge quando  $x = a$ .

**Exemplo 3.** Considere a série de potências tal que  $c_n = 1$  para todo  $n$  e  $a = 0$ .

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1(x - 0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots$$

Observe que temos uma série geométrica em que a razão é  $x$ .

Portanto, obtemos que a série de potências converge para todos os valores de  $x$  tal que  $|x| < 1$ , ou seja,  $-1 < x < 1$ . Também a série de potências diverge para  $x \geq 1$ .

**Teorema 4.** Para uma série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$  existem apenas 3 possibilidades

- i) A série converge apenas quando  $x = a$ ;
- ii) A série converge para todo  $x$ . O intervalo de convergência é  $(-\infty, +\infty)$ , seu raio de convergência é  $\infty$ ,  $R = \infty$ ;
- iii) Existe  $R > 0$  tal que a série converge se  $|x - a| < R$  e diverge se  $|x - a| > R$ .

Observe que no último caso do teorema acima  $R$  é chamado de raio de convergência. O teorema nada afirma sobre a convergência da série quando  $x = R$ . Por isso temos que testar se os pontos  $R$  e  $-R$  são pontos em que a série diverge ou converge.

**Teorema 5.** Se a série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$  tiver um raio de convergência  $R > 0$ , então a função  $f$  definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

é diferenciável (portanto contínua) e integrável no intervalo de convergência  $(a-R, a+R)$  além disso

$$(i) f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$$

$$(ii) \int f(x)dx = C + c_0(x-a) + c_1 \frac{(x-a)^2}{2} + c_2 \frac{(x-a)^3}{3} + \dots = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}.$$

Os raios de convergência da Série de Potências nas equações (i) e (ii) são ambos iguais a  $R$ .

### 3 Equações Diferenciais

**Definição 6.** Uma equação que contém derivadas ou diferenciais de uma ou mais funções, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de Equação Diferencial (ED).

Equações Diferenciais são classificadas de acordo com o tipo, a ordem e a linearidade.

Se uma equação contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais funções, com relação a uma única variável independente, ela é chamada de Equação Diferencial Ordinária (EDO).

Uma equação que envolve as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais funções, é chamada de Equação Diferencial Parcial (EDP).

A ordem da derivada de maior ordem em uma equação diferencial é, por definição, a ordem da equação.

**Definição 7.** Qualquer função  $f$  definida em algum intervalo  $I$ , que, quando substituída na equação diferencial, reduz a equação a uma identidade, é chamada de solução para a equação no intervalo.

Em outras palavras, uma solução para uma equação diferencial ordinária

$$F(x, y, y', \dots, y^n) = 0$$

é uma função  $f(x)$  que possui pelo menos  $n$  derivadas e satisfaz a equação, isto é

$$F(x, f(x), f'(x), \dots, f_n(x)) = 0$$

para todo  $x$  no intervalo  $I$ . Propositadamente, deixamos vaga a forma precisa do intervalo. Dependendo do contexto da discussão,  $I$  pode representar um intervalo aberto  $(a, b)$ , um intervalo fechado  $[a, b]$ , um intervalo infinito  $(0, \infty)$  e assim por diante.

**Definição 8.** Um problema de valor inicial (PVI), é um conjunto de uma equação diferencial, de ordem  $n$ , juntamente com  $n$  condições iniciais. Será, em geral, um problema da forma.

$$\begin{cases} a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + \dots + a_1(x)y = g(x) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Quando uma dada equação diferencial não é linear ou quando os coeficientes não são constantes, pode não ser muito fácil determinar soluções para esta ED. Em geral, podemos esperar que exista uma solução  $y$  dada em forma de série de potências da variável independente  $x$ , isto é,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots.$$

Determinar esta série de potência significa determinar os coeficientes  $b_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . O método é por abordagem direta. Dada a ED, supomos que a função  $y = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  seja uma solução desta ED, e a substituição desta série na equação diferencial pode nos levar ao cálculo dos coeficientes  $b_n$ .

Nesta abordagem é necessário substituir todas as funções envolvidas na ED por suas respectivas séries de potências.

Em geral nem todos coeficientes  $b_n$  serão determinados. Isto porque a solução de uma ED, como já sabemos depende de algumas constantes, que no caso são alguns dos próprios coeficientes  $b_n$ . Uma vez determinada a série de potências, outro problema é determinar o intervalo  $I$  de convergência desta série. Intervalo no qual esta série define uma função, e portanto, define uma solução para a equação diferencial por série de potência.

## 4 Função Gama

**Definição 9.** A função Gama é a função que a cada real positivo  $x > 0$  associa o número real representado por  $\Gamma(x)$  determinado pela integral imprópria

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{(x-1)} e^{-t} dt.$$

A primeira coisa que faremos é mostrar que esta função está bem definida, isto é, que a integral imprópria converge qualquer que seja  $x \in (0, \infty)$ .

**Proposição 10.** Para qualquer que seja  $x \in \mathbb{R}$ , com  $x > 0$ , a integral imprópria

$$\int_0^{\infty} t^{(x-1)} e^{-t} dt.$$

converge.

*Prova.* Para esta prova vamos analisar a integral nos intervalos  $(0, 1)$  e  $(1, \infty)$ . Para  $t \in (0, 1)$ , temos que  $e^{-t} \leq 1$  e então

$$\int_0^1 t^{(x-1)} e^{-t} dt \leq 1 \int_0^1 t^{(x-1)} dt = \frac{t^x}{x} \Big|_{t=0}^1 = \frac{1}{x}.$$

Agora para  $t \in (1, \infty)$  temos da série de potências da função exponencial que  $e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$  e desta forma, qualquer que seja  $n \in \mathbb{N}$  temos que

$$\frac{t^n}{n!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t$$

donde  $e^{-t} \leq \frac{n!}{t^n}$  para qualquer que seja  $n \in \mathbb{N}$ . Assim,

$$\int_1^{\infty} t^{(x-1)} e^{-t} dt \leq \int_1^{\infty} t^{(x-1)} \frac{n!}{t^n} dt = \int_1^{\infty} \frac{n!}{t^{n-x+1}} dt.$$

Basta agora escolhermos  $n > 1 + x$  e temos  $x - n - 1 \neq -1$ , donde

$$\int_1^{\infty} t^{(x-1)} e^{-t} dt < \int_1^{\infty} \frac{n!}{t^{n-x+1}} dt = \frac{n!}{x-n} \frac{1}{t^{n-x}} \Big|_{t=1}^{\infty} = 0 - \frac{n!}{x-n} = \frac{n!}{n-x} < n!,$$

já que  $n - x > 1$ . Assim, segue que

$$\int_0^{\infty} t^{(x-1)} e^{-t} dt = \int_0^1 t^{(x-1)} e^{-t} dt + \int_1^{\infty} t^{(x-1)} e^{-t} dt < \frac{1}{x} + n!.$$

□

Fica claro também que não existe  $\Gamma(0)$  já que a integral diverge quando  $x = 0$ . De fato, da definição com  $x = 0$  temos que

$$\Gamma(0) = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{1}{t} dt > \int_0^1 e^{-t} \frac{1}{t} dt > \int_0^1 \frac{1}{e} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{e} \int_0^1 \frac{1}{t} dt = \infty.$$

**Proposição 11.** Se  $x > 0$ , então  $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ .

*Prova.* A prova é feita usando a integração por partes. Primeiro temos que

$$\Gamma(x + 1) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt.$$

Colocando então  $u = t^x$  e  $\frac{dv}{dt} = e^{-t}$ , temos que  $\frac{du}{dt} = xt^{x-1}$  e  $v = -e^{-t}$  donde

$$\begin{aligned} \Gamma(x + 1) &= \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt \\ &= t^x (-e^{-t}) \Big|_{t=0}^{\infty} + \int_0^{\infty} t^0 e^{-t} dt \\ &= (0 + 0) + x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x). \end{aligned}$$

□

**Corolário 12.** Se  $n \in \mathbb{N}^*$ , então  $\Gamma(n) = (n - 1)!$

## 5 Funções De Bessel

O estudo desta seção é baseado em Bowman (1958). Maiores detalhes recomendamos esta referência ao leitor.

A equação de Bessel de índice  $p$  é a EDO

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$$

onde  $p$  é um número real. Procuramos uma solução da forma

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}.$$

Temos então

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

e

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}.$$

Disso temos

$$x^2 y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r},$$

$$xy' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r},$$

$$x^2 y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2}$$

e

$$p^2 y = \sum_{n=0}^{\infty} p^2 a_n x^{n+r}$$

Substituindo na equação de Bessel, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} - \sum_{n=0}^{\infty} p^2 a_n x^{n+r} = 0.$$

Juntando o 1º, 2º e o 4º somatórios, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+r)^2 - p^2) a_n x^{n+r+2}.$$

No segundo somatório acima, fazendo  $k = n + 2$  e fatorando o coeficiente do primeiro somatório, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r+p)(n+r-p) a_n x^{n+r} + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{k+r} = 0.$$

No segundo somatório, substituindo o índice  $k$  por  $n$ , separando os dois primeiros termos do primeiro somatório, obtemos

$$(r+p)(r-p)a_0x^r + (r+p+1)(r-p+1)a_1x^{r+1} + \sum_{k=2}^{\infty} ((n+r+p)(n+r-p)a_n + a_{n-2})x^{n+r} = 0.$$

Segue que,

$$(r+p)(r-p) = 0 \tag{1}$$

$$(r+p+1) \cdot (r-p+1)a_1 = 0 \tag{2}$$

$$(n+r+p)(n+r-p)a_n + a_{n-2} = 0 \tag{3}$$

A equação (1) tem raízes  $r_1 = p$  e  $r_2 = -p$ .

Para  $r_1 = p \geq 0$ , a equação (2) se torna

$$(2p+1)a_1 = 0$$

ou seja,

$$a_1 = 0. \tag{4}$$

A fórmula de recorrência (3) se torna

$$(n+2p)na_n + a_{n-2} = 0, \tag{5}$$

e disto segue que

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2p)}. \tag{6}$$

Usando (5) e (6) e deixando para escolher mais tarde o valor de  $a_0$ , obtemos

$$a_{2n+1} = 0$$

e também

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_0}{2(2+2p)} \\ a_4 &= \frac{a_0}{2 \cdot 4(2+2p)(4+2p)} \\ a_6 &= -\frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6(2+2p)(4+2p)(6+2p)} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Podemos reescrever

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_0}{1(1+p) \cdot 2^2} \\ a_4 &= \frac{a_0}{1 \cdot 2(1+p)(2+p) \cdot 2^4} \\ a_6 &= -\frac{a_0}{1 \cdot 2 \cdot 3(1+p)(2+p)(3+p) \cdot 2^6} \end{aligned}$$

⋮

Em geral,

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{n!(1+p)(2+p)\dots(n+p) \cdot 2^{2n}}. \quad (7)$$

Costuma-mos fazer a escolha

$$a_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(1+p)}, \quad (8)$$

e utilizando repetidas vezes a identidade

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

temos

$$\begin{aligned} & (n+p)\dots(2+p)(1+p)\Gamma(1+p) \\ &= (n+p)\dots(2+p)\Gamma(2+p) \\ &= (n+p)\dots(3+p)\Gamma(3+p) = \dots = \Gamma(n+p+1). \end{aligned}$$

Portanto com a escolha (8), a equação (7) se torna

$$a_{2n} = -\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+p+1)2^{2n+p}}.$$

Obtemos finalmente a solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

que é chamada de função de Bessel de primeira espécie de índice  $p$ , e denotada por  $J_p(x)$ . Assim,

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}. \quad (9)$$

## 6 Propriedades da Função de Bessel

Muitos fatos sobre a função de Bessel podem ser provados usando a função geral  $J_p(x)$

**Teorema 13.** *Sejam  $n \in \mathbb{Z}$  e  $x, z \in \mathbb{R}, z \neq 0$  e  $J_n(x)$  a função de Bessel dada na Equação (9), então*

$$e^{\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n \quad (10)$$

*Prova.* Temos

$$e^{\frac{x}{2}z} e^{-\frac{x}{2}\frac{1}{z}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^m}{m!} z^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^k \left(\frac{x}{2}\right)^k}{k!} z^{-k}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{m-k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{k+m}}{m!k!} \right) z^n \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(n+k)!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \left(\frac{x}{2}\right)^n \right) z^n \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n.
 \end{aligned}$$

□

**Corolário 14.** *Seja  $n \in \mathbb{Z}$ , temos*

$$\begin{aligned}
 \cos x &= J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x) \\
 \operatorname{sen} x &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(x) \\
 1 &= J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x).
 \end{aligned}$$

*Prova.* Diretamente de (10) com  $z = e^{i\theta}$ ,  $i \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}(z - \frac{1}{z})$  obtemos

$$\cos(x \operatorname{sen} \theta) + i \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta) = e^{ix \operatorname{sen} \theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)).$$

Então

$$\cos(x \operatorname{sen} \theta) = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos(2n\theta)$$

e

$$\operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(x) \operatorname{sen}((2n+1)\theta).$$

□

**Corolário 15.** *Para todos  $x \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{Z}$ .*

$$J_n(-x) = J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x). \tag{11}$$

*Prova.* Para mostrar a primeira igualdade, deve-se fazer a mudança de variáveis  $x \rightarrow -x$ ,  $z \rightarrow z^{-1}$  em (10), donde obtemos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(-x) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{-n}(x) z^{-n}.$$

Comparando os coeficientes temos o resultado. A segunda igualdade é análoga tendo a seguinte mudança de variáveis  $z \rightarrow -z^{-1}$ . □

**Corolário 16.** *Para todo  $n \in \mathbb{Z}$  temos*

$$\begin{aligned}
 2J'_n(x) &= J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) \\
 \frac{2n}{x} J_n(x) &= J_{n+1}(x) - J_{n-1}(x) \\
 \frac{d}{dx} (x^n J_n(x)) &= x^n J_{n-1}(x).
 \end{aligned}$$

*Prova.* A primeira afirmação é demonstrada derivando (10) em relação a  $x$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)z^n &= \frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z}\right) e^{\frac{x}{2} \left(z - \frac{1}{z}\right)} \\ &= \frac{1}{2} z \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)z^n - \frac{1}{2z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)z^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)z^n). \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes temos os resultados. A segunda afirmação é analoga. Derivando (10) em respeito a  $z$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)z^n &= \frac{d}{dz} e^{\frac{x}{2} \left(z - \frac{1}{z}\right)} \\ &= \frac{1}{2} x \left(1 + \frac{1}{z^2}\right) e^{\frac{x}{2} \left(z - \frac{1}{z}\right)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n(x) z^{n-1} \\ &= \frac{1}{2} x \left(1 + \frac{1}{z^2}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n(x) z^{n-1} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^{n-2} = \frac{2}{x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n(x) z^{n-1}. \end{aligned}$$

A fim de comparar os coeficientes, igualamos os expoentes de  $z$  a  $n - 1$  em todos os somatórios. Obtemos assim,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n-1}(x)z^{n-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n+1}(x)z^{n-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2n}{x} J_n(x)z^{n-1}.$$

Adicionando as duas equações e multiplicando com  $\frac{x^n}{2}$  temos o terceiro resultado.  $\square$

**Corolário 17.** Para todos  $x \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{Z}$  temos

$$\int x^{n+1} J_n(x) dx = x^{n+1} J_{n+1}(x)$$

e

$$\int x^{-n+1} J_n(x) dx = -x^{-n+1} J_{n+1}(x).$$

*Prova.* A primeira igualdade vem direto do Corolário 14. Para a segunda igualdade usamos os Corolários 14 e 15 para obter

$$\int x^{-n+1} J_n(x) dx = \int x^{-n+1} (-1)^n J_{-n}(x) dx = (-1)^n x^{-n+1} J_{-n+1}(x) = -x^{-n+1} J_{n+1}.$$

$\square$

**Corolário 18.** Para todos  $x, y \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{Z}$  temos

$$J_n(x + y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} J_k(x) J_{n-k}(y).$$

*Prova.*

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} J_n(x + y) z^n &= e^{\frac{1}{2}(x+y)(z-z^{-1})} \\ &= e^{\frac{1}{2}x(z-z^{-1})} e^{\frac{1}{2}y(z-z^{-1})} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} J_k(x) z^k \sum_{m \in \mathbb{Z}} J_m(y) z^m \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} J_k(x) J_{n-k}(y) \right) z^n. \end{aligned}$$

□

**Corolário 19.** Para todos  $x \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{Z}$  temos  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(x) = 1$ .

*Prova.* Basta tomar  $z = 1$  em (10)

$$e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})} = 1.$$

□

## 7 Conclusões

Neste trabalho obtemos uma solução para a Equação de Bessel, que é chamada de Função de Bessel, e estudamos algumas propriedades desta função, estas propriedades são importantes, pois, há uma vasta área de aplicação para essa função, pois, a mesma modela inúmeros fenômenos da natureza, dessa forma o estudo dessas propriedades proporcionaria um melhor entendimento desses fenômenos podendo assim representa-los matematicamente.

## Referências

- Bowman, Frank. *Introduction to Bessel Functions*. Dover Publications. New York, 1958.  
Stewart, James. *Cálculo*. Vol 2. 7ª edição. São Paulo, 2013.



## A Influência do Pibid na Formação Docente

Eliandra de Oliveira  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
eliandra.oliveiraaa@gmail.com

Janaina Maria de Lima Gonçalves  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
userjanaina@gmail.com

Jaqueline do Nascimento  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
jaque\_nasci@hotmail.com

Mariana da Rosa  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
marianabernartt@hotmail.com

**Resumo:** O presente trabalho busca evidenciar a importância do Programa Institucional de Bolsista a Iniciação à Docência-PIBID na formação do acadêmico que procura o aperfeiçoamento profissional e o contato com a sala de aula de uma forma mais ampla, ainda na iniciação à docência. Procuramos abordar a importância do programa PIBID para o desenvolvimento do licenciando desde os primeiros períodos da graduação, enfatizando o seu papel de aluno-professor, e seus saberes construídos oriundos dessa experiência. O trabalho analisou uma pesquisa realizada pela coordenação do Pibid-Unioeste com todos os subprojetos inseridos na universidade, esta realizou um questionário online, que foi respondido por 76% dos bolsistas. A partir da análise de dados, constata-se o quanto é importante o programa na vida dos acadêmicos, tanto na pesquisa e embasamento teórico quanto na parte prática.

**Palavras-chave:** Formação de Docente; Pibid.

### 1 Introdução

Por meio deste trabalho, buscamos identificar a importância do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (Pibid) da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de nível Superior (Capes) na Universidade Estadual do Oeste do Paraná para o desenvolvimento e aprimoramento da formação inicial dos discentes (futuros docentes) das licenciaturas ofertadas na instituição mencionada anteriormente. A identificação teve respaldo na pesquisa intitulada “Percepções dos bolsistas de Iniciação à docência e supervisores no âmbito do PIBID/Unioeste”, realizada no ano de 2016 pela equipe de coordenação de gestão do referido projeto.

O Pibid é um programa de pesquisa e extensão que tem por objetivo aperfeiçoar e valorizar a formação de professores para a educação básica. O programa atende acadêmicos de licenciatura e também oferece uma oportunidade de formação continuada aos professores

supervisores e orientadores. Proporciona bolsas aos licenciados participantes do projeto, e faz parceria com escolas de educação básica da rede pública de ensino.

Segundo Guimarães (2013, p.2-3), o Pibid tem como objetivos:

[...] inserir os licenciandos no cotidiano de escolas da rede pública de educação, proporcionando-lhes oportunidades de criação e participação em experiências metodológicas, tecnológicas e práticas docentes de caráter inovador e interdisciplinar que busquem a superação de problemas identificados no processo de ensino aprendizagem; contribuir para a articulação entre teoria e prática necessárias à formação dos docentes, elevando a qualidade das ações acadêmicas nos cursos de licenciatura; contribuir para que os estudantes de licenciatura se insiram na cultura escolar do magistério, por meio da apropriação e da reflexão sobre instrumentos, saberes e peculiaridades do trabalho docente.

Assim, o projeto pode promover a inserção dos estudantes nas escolas públicas desde o início da sua formação acadêmica para que possam desenvolver atividades com técnicas e métodos de ensino sob orientação de um docente da licenciatura e de um professor supervisor da escola.

Desse modo, a formação docente não está interligada somente com a universidade, mas também com professores que já atuam no exercício da docência sendo que, por meio deles e das problemáticas nas quais são por eles propostas, os bolsistas podem refletir e adquirir experiência como futuros professores.

É evidente que a Universidade tem um papel importante a desempenhar na formação de professores. Por razões de prestígio, de sustentação científica, de produção cultural. Mas a bagagem essencial de um professor adquire-se na escola, através da experiência e da reflexão sobre a experiência. Esta reflexão não surge do nada, por uma espécie de geração espontânea. Tem regras e métodos próprios. (NÓVOA, 2003, p.5).

O enfoque do programa viabiliza o diálogo e a interação entre licenciando, supervisores e coordenadores, os quais geram uma formação recíproca e contínua, ou seja, representando uma via de mão dupla; tanto a escola quanto a universidade aprendem e ensinam ao mesmo tempo. Segundo Canan e Corsetti (2016), o programa - além de proporcionar uma experiência única - também relaciona uma ponte entre a teoria e a prática, ainda na formação inicial do docente.

O objetivo central deste trabalho é relatar como o PIBID está sendo importante para a formação inicial docente do ainda acadêmico, o qual ora é aluno, ora professor, tendo este a possibilidade de estar em contato com a universidade e com as escolas de educação básica, fazendo correlações, estudos, reflexões e procurando intermediar a relação entre teoria e prática desde a sua formação.

## 2 Dados da pesquisa

O Pibid/Unioeste contempla um total de 20 subprojetos, sendo eles: Biologia, Ciências Sociais, Educação Física, Enfermagem, Filosofia, Geografia (Marechal Cândido Rondon e

Francisco Beltrão), História, Letras/Português (Cascavel e Marechal Cândido Rondon), Letras/Espanhol, Letras/Inglês (Cascavel, Foz do Iguaçu e Marechal Cândido Rondon), Matemática (Cascavel e Foz do Iguaçu), Pedagogia (Cascavel, Foz do Iguaçu e Francisco Beltrão) e Química divididos entre os cinco *campi*. Totalizando 321 bolsistas de iniciação à docência (bolsista ID) no ano de 2016.

A pesquisa que analisamos foi realizada de forma online por meio de um link do Google formulários, enviado a todos os bolsistas Iniciação à Docência, ID e supervisores atuantes no segundo semestre de 2016, com o objetivo de conhecer o perfil pedagógico dos bolsistas do Pibid e do professor supervisor. A pesquisa realizada visava tornar explícita a percepção acerca do Programa e a forma pela qual tem sido desenvolvido, na perspectiva de tais autores, também intencionava discutir melhorias para o Programa, investigando a percepção das necessidades e deficiências na formação acadêmica.

Nesta pesquisa, 76% dos que receberam o link do formulário responderam o questionário, totalizando 244 bolsistas ID. O questionário era constituído por perguntas referentes ao perfil do futuro docente, à relevância do Pibid quanto a sua formação e os principais objetivos dos licenciados em relação ao programa, buscando identificar os fatores mais relevantes na contribuição que o Pibid traz para a formação dos docentes.

Conforme o gráfico abaixo, verificamos que a maior quantidade de discentes está alocada na faixa etária de 17 a 22 anos, totalizando uma porcentagem de 73,8% dos bolsistas ID.



Figura 1: Faixa etária dos bolsistas ID

Fonte: dados da pesquisa

Visto a quantia significativa de discentes dessa faixa etária (17 a 22), percebe-se que os alunos nos seus primeiros anos no curso de graduação já entram em contato com o exercício de sua futura profissão docente. Permitindo-lhes uma experiência maior antes mesmo de efetuar o estágio obrigatório supervisionado.

A primeira questão relevante a pesquisa foi sobre a percepção do curso de graduação em relação a oferta de formação para a atuação na escola, o qual vemos no gráfico de setor a seguir, que 48,8% dos alunos responderam que a formação realizada no curso está defasada, não contemplado todos os subsídios para atuação em sala de aula como docente, sendo que o estágio pode ser o único contato do discente com a docência antemão a sua formação, sabido que

Esta atividade propicia ao aluno experiências profissionais preparando-o para o mercado de trabalho, entretanto, na maioria dos casos, este é o primeiro e único contato que o aluno tem com o seu campo de atuação antes da conclusão de seu curso, por meio de uma carga horária relativamente baixa, previamente estabelecida pelas IES. (CORNELO, 2015, p.4).

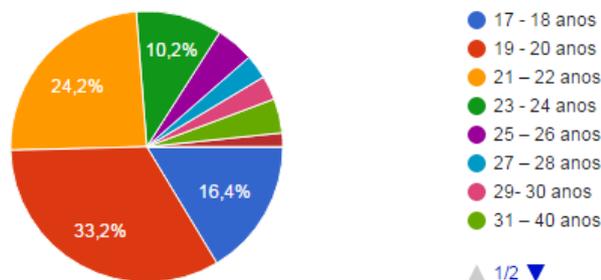


Figura 2: Formação acadêmica

Fonte: dados da pesquisa

Em relação aos dados coletados da pesquisa referente ao motivo da entrada dos alunos no Pibid, 84,4% do público alvo afirmam que a intenção é conhecer o ambiente escolar e/ou aperfeiçoar a sua formação acadêmica, ou seja, o Pibid oportuniza o contato com o ambiente e a realidade escolar, de forma que possam interagir e vivenciar práticas docentes. O restante dividiu-se entre interesses financeiros, atuações em pesquisa e a realização de horas complementares.

Quando questionados sobre o objetivo do Pibid, os acadêmicos poderiam escolher mais que uma alternativa que em sua concepção sana-se este item. Na análise dos dados, tem-se que aproximadamente 60% mencionaram que o objetivo principal do Pibid é a melhoria da formação de professores, outros 47% sinalizaram que o objetivo é a iniciação à docência pela inserção no campo profissional, foram indicados também como objetivo a troca de experiências entre professores em formação inicial e continuada e entre escola e universidade item o qual foi respondido por aproximadamente 10% das pessoas.

Do ponto de vista dos alunos, a participação no Pibid proporcionou facilidades relacionadas ao planejar as atividades vinculadas ao exercício da docência, aprendê-las e a questioná-las. Com o incentivo do programa, os alunos se comprometeram a ensinar e aprender.

Segundo Freire (2011, p.23):

Não há docência sem discência, as duas se explicam e seus sujeitos, apesar das diferenças que os conotam, não se reduzem à condição de objeto um do outro. (FREIRE, 2011, p.23)

De acordo com isso e com a pesquisa, foi apontado que os alunos ingressados no projeto tiveram evolução na escrita e fala, no quesito autonomia própria e nas interações pessoais. O Pibid tem uma parcela de responsabilidade para o amadurecimento do discente (futuro docente), pelo seu caráter incentivador.

Ainda, os discentes ingressados no Pibid, conseguem ter uma visualização mais amadurecida sobre a educação, mesmo sem ainda exercê-la efetivamente. São expostos a novas vivências e ao acúmulo de experiências, quando estão desenvolvendo as atividades do programa.

### 3 Considerações finais

Conforme o apresentado, tem-se que o Pibid auxilia de forma expressiva e positiva no processo de formação docente, pois como analisado por meio dos dados do questionário, o projeto possibilita ao bolsista conhecer e participar de atividades relacionadas ao âmbito escolar, vivenciando o planejamento e a prática docente o que é fundamental no processo de construção da sua identidade profissional, além de propiciar uma visão realista da docência, dos desafios impostos pela profissão.

Nesse contexto o Pibid contribui para a formação de docentes cientes do contexto escolar que atuarão, profissionais com postura investigativa e reflexiva acerca da própria prática docente com olhar crítico e diferenciado com relação aos diversos temas relacionados à educação.

O Pibid assim, tem um papel incentivador e influenciador na formação de futuros docentes. Podendo ser considerado como um diferencial, apesar dos resultados ainda serem superficiais. Tem um importante papel na sociedade, ofertando qualidade na educação. Assim como diz Paulo Freire (2002, p.67), “se a educação sozinha não pode transformar a sociedade, sequer sem a educação a sociedade muda.”

### Referências

- BRASIL. Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior - CAPES. Portaria nº 096, de 18 de julho de 2013. Dispõe sobre o aperfeiçoamento e atualização das normas do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência - PIBID. Diário Oficial da União - República Federativa do Brasil - Imprensa Nacional, Brasília, nº 140, p. 11, 23 de julho de 2013.
- BURCHARD, C. S.; SARTORI, J. **Formação de Professores de Ciências: refletindo sobre as ações do Pibid na escola.** In: Seminário sobre Interação universidade/escola, 2, 2011, Santa Maria. Seminário. Santa Maria: UFSM, 2011. p. 1 - 10.
- CORNELO C.S., 12., 2015, Guarapuava. **O ALUNO ENQUANTO PROFESSOR: A INFLUÊNCIA DO PIBID NA FORMAÇÃO DOCENTE.** Curitiba: PUC-PR, 2015. 11 p. Disponível em: <[http://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2015/16234\\_8344.pdf](http://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2015/16234_8344.pdf)>. Acesso em: 11 set. 2017.
- CANAN, S. R.; CORSETTI, Berenice. **O professor em formação: o Pibid no contexto da Política Nacional de Formação de Professores.** In: 4º Ibero Americano, 2016, **Anais...** Belo Horizonte: UFMG, 2016. p. 1 - 17.
- FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia: Saberes necessários a pratica educativa.** 25. ed. São Paulo: Paz e Terra S/A, 2002. 54 p.

- GAMA, A. G. B. et al. **A importância do projeto Pibid na formação dos alunos de licenciatura em química do IFRN**, In: CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA, 9, 2013, Rio Grande do Norte. **Artigo**. Rio Grande do Norte: IFRN, 2014. p. 1 - 7.
- GUIMARÃES, J. A. **Regulamento do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à docência**. Portaria nº 096, 2013.
- NÓVOA, A. **Profissão professor**, 3. ed. Portugal: Porto, 2003.

## O ensino de função do primeiro grau por meio de um experimento

André Guilherme Unfried<sup>1</sup>  
Unioeste  
andre\_unfrich@hotmail.com

Guilherme Gasparini Lovatto<sup>1</sup>  
Unioeste  
guigasparinilovatto@hotmail.com

Leonardo Salvador<sup>1</sup>  
Unioeste  
leonardosalvador1903@gmail.com

Francieli Cristina Agostinetti Antunes  
Unioeste  
franciellantunes@gmail.com

**Resumo:** Este texto tem como finalidade relatar o experimento que foi feito com alunos do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola de rede pública de ensino, parceira do Subprojeto PIBID Matemática, onde foi utilizado bolas de gude, tubos de ensaios e outros itens. Foram resgatados conhecimentos prévios relevantes à aprendizagem de Função Afim. Essa é uma atividade que se enquadra em um dos casos de Modelagem Matemática, especificados por Barbosa (2001), buscando promover aprendizagem significativa dos alunos, baseados em Ausubel (1990).

**Palavras-chave:** Funções; Modelagem Matemática; Aprendizagem Significativa.

### 1 Introdução

O tema dessa pesquisa está concentrado no resultado da experiência vivida pelos autores em uma atividade desenvolvida como parte do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência - PIBID, Subprojeto Matemática, *Campus* Cascavel, com ajuda de uma professora vinculada ao Curso de Matemática, colaboradora do Subprojeto. Esta atividade foi aplicada no Colégio Estadual Marechal Humberto de Alencar Castelo Branco na cidade de Cascavel, Paraná, sob a orientação do professor supervisor do mesmo subprojeto.

Tendo em vista que o conteúdo trabalhado em sala pelo professor supervisor era função do primeiro grau e como apresentado no PCN, como apresentado:

---

<sup>1</sup>Bolsista de Iniciação à Docência do Subprojeto de Matemática, do *campus* de Cascavel.

O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções. (BRASIL, 2006, p.121).

Com o intuito de levar os alunos a se relacionar com as grandezas e modelar situações-problemas, surgiu a possibilidade de ministrar uma atividade que fosse diferenciada, diversificando os materiais utilizados, propondo o ensino de função por meio de materiais manipuláveis úteis para o entendimento da situação proposta.

Como descrito por Lorenzato (2006), mais importante do que dispor de um bom material é saber utilizá-lo corretamente para promover uma aprendizagem significativa que vai ao encontro com o que dizem Rodrigues e Gazire (2012), que estes objetos constituem uma ferramenta capaz de tornar as aulas de matemática mais dinâmicas e compreensíveis, pois, permitem a visualização de uma relação entre a teoria matemática e a aplicabilidade.

Segundo Matos e Serrazina (1996), o aprendizado não surge apenas manipulando os objetos, pois os conceitos não estão no material ou na manipulação dele, assim, para que se tenha uma aprendizagem dos conteúdos é necessária uma atividade mental por parte do aluno, a qual pode ser orientada pelo professor e rodeada de reflexões sobre a ação que se está realizando, permitindo ao aluno o reconhecimento das relações.

## 2 Aprendizagem Significativa

Ao tratar-se sobre a aprendizagem, nossas reflexões basearam-se em David Ausubel (AUSUBEL et al, 1990), comentado por Moreira (2011) que relata:

Aprendizagem Significativa é aquela em que ideias expressas simbolicamente interagem de maneira substantiva e não-arbitrária com aquilo que o aprendiz já sabe. Substantiva quer dizer não-literal, não ao pé da letra, e não-arbitrária significa que a interação não é com qualquer ideia prévia, mas sim com algum conhecimento especificamente relevante já existente na estrutura cognitiva do sujeito que aprende (MOREIRA, 2011, p. 13).

Aos conhecimentos relevantes à aprendizagem do novo conceito Ausubel os nomeou de subsunçores. Estes subsunçores estão presentes na estrutura cognitiva do aluno e são eles que permitem atribuir significado ao novo conceito que lhe é apresentado.

Os conhecimentos prévios podem possuir diferentes níveis de estabilidade cognitiva, ou seja, quando utilizados como subsunçores para interação com conhecimentos novos, além de atribuir significado ao conceito novo eles estarão sendo fortalecidos na estrutura cognitiva do educando maneira ressaltada que:

“A aprendizagem significativa se caracteriza pela interação entre conhecimentos prévios e conhecimentos novos, e que essa interação é não-literal e não-arbitrária. Nesse processo os novos conhecimentos adquirem significado para o sujeito e os conhecimentos prévios novos significados ou maior estabilidade cognitiva” (MOREIRA 2011, p. 14).

Para promover a aprendizagem é preciso ter clareza de quais conhecimentos prévios são relevantes à aprendizagem do novo conceito, os subsunçores, no qual o conceito de função tem como conhecimentos prévios relevantes, descritos pelo PCN (2006), o estudo dos números reais e de conjuntos e suas operações, para posteriormente definir relações e a partir daí identificar as funções como particulares relações.

Podemos inferir outros conceitos, como a substituição de valor à variável, resolução de expressões algébricas e aritméticas, entre outros. Cujo resgate no momento da atividade proposta são relevantes para que o aluno possa relacionar o novo conceito com o que já existe em sua estrutura cognitiva.

### 3 Modelagem Matemática

São vários argumentos que justificam a prática da metodologia de Modelagem Matemática (MM), para abordar conceitos do currículo escolar. Um dos adeptos a isso foi Blum (1995), que cita cinco pontos importantes ao trabalho com esta metodologia: 1) envolver os alunos em questões contextualizadas, o que provoca maior interesse dos mesmos; 2) facilidade na compreensão das ideias matemáticas; 3) adquirir capacidade para aplicar conceitos matemáticos em situações do cotidiano; 4) desenvolver habilidades na área da investigação; 5) possibilitar a análise da matemática como prática social.

A MM está relacionada com investigar e problematizar sempre em atividades de relevância real, no contexto social, em situações vivenciadas pelo aluno. Para Barbosa “[...] é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade” (BARBOSA, 2001, p. 6).

Ainda segundo o autor, essa metodologia pode ser classificada em três casos, pois existem diferentes experiências na Modelagem nas quais variam o papel do professor e do aluno:

“No caso 1, o professor apresenta um problema, devidamente relatado, com dados qualitativos e quantitativos, cabendo aos alunos a investigação. [...] Nesse caso, os alunos não precisam sair da sala de aula para coletar novos dados e a atividade não é muito extensa. Porém, eles, acompanhados pelo professor, teriam a tarefa de resolver o problema. Já no caso 2, os alunos deparam-se apenas com o problema para investigar, mas têm que sair da sala de aula para coletar dados. Ao professor, cabe apenas a tarefa de formular o problema inicial. Nesse caso, os alunos são mais responsabilizados pela condução das tarefas. [...] Aqui, os alunos não teriam muitas informações para desenvolver a tarefa, teriam que buscar fora da sala de aula. E, por fim, no caso 3, trata-se de projetos desenvolvidos a partir de temas ‘não-matemáticos’, que podem ser escolhidos pelo professor ou pelos alunos. [...] A partir daí, eles precisariam levantar informações, formular problemas e resolvê-los. No caso 3, o professor pode propor um tema para a turma, ou pedir que ela própria escolha ou ainda pode convidar que os alunos, por grupos, para decidirem que assunto querem investigar.” (BARBOSA, 2003, p. 10 e 11).

Em consonância com as perspectivas da Educação Matemática, de atenção voltada ao ensino e a aprendizagem, ciente da importância de outras áreas que se preocupam com a educação, com um docente reflexivo e em contínua formação, essa metodologia não enfatiza apostilas, li-

vros didáticos respeitados conforme a sequência em que os conceitos são apresentados. Expõe a subjetividade do conhecimento, permitindo a criatividade e a liberdade ao fazer pedagógico.

Na visão de Burak a Modelagem permite “[...] conduzir a novas práticas mais libertadoras e mais amplas” (BURAK, 2010, p.17).

O uso dessa metodologia pode surgir de duas premissas: o interesse dos alunos e a coleta dos dados resultante das investigações realizadas pelos envolvidos. Burak (2010) sugere como etapas para a aplicação dessa metodologia em sala de aula:

- 1) Escolha do tema. (De acordo com o interesse dos alunos);
- 2) Pesquisa exploratória. (Questionamentos vindos da curiosidade do aluno);
- 3) Levantamento do problema. (Com os dados pesquisados, formulação de um problema ou situação-problema);
- 4) Resolução do problema. (Podendo ser utilizado os procedimentos específicos dessa metodologia); 5) Análise crítica das soluções. (Os fins não possuem tanta importância, mas os pensamentos e procedimentos que levaram a uma determinada solução).

## 4 A Atividade

A atividade do experimento foi baseada na metodologia de Modelagem Matemática, a qual Burak (1992, p. 62), disse que: “constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é estabelecer um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano [...]”.

Assim, essa aula foi elaborada de acordo com o “Caso 1” de Modelagem Matemática definido por Barbosa no qual, “[...] o professor apresenta um problema, devidamente relatado, com dados qualitativos e quantitativos, cabendo aos alunos a investigação” (2003, p.10).

A atividade foi apresentada por meio de experimento, nele os alunos deveriam fazer as manipulações com os objetos que compunham o experimento para encontrar os dados. Para realização desta atividade, foram utilizadas provetas, bolinhas de gude, água e uma tabela para anotar os dados obtidos a partir do experimento.

Inicialmente, a sala foi dividida em grupos de três pessoas, cada grupo recebeu uma proveta, 8 bolinhas de gude e 50 mL de água, que deviam ser colocados na proveta conforme a orientação. Na tabela os alunos deveriam marcar o volume inicial de água, e em seguida colocar uma bolinha de gude dentro da proveta e anotar qual o novo volume obtido, assim, deveriam proceder da mesma maneira com as oito bolinhas. Com isso seria possível encontrar alguns dados e a partir da tabela, analisá-los.

O intuito era que, os alunos percebessem a existência de uma relação entre os dados obtidos e modelassem a função que os representasse. Foi possível perceber a dificuldades dos alunos em encontrar a relação, assim para que conseguissem chegar ao resultado esperado o

encaminhamento da atividade se deu por meio de perguntas para levá-los a construir o conhecimento.

Por fim, essa atividade trouxe aos alunos uma visão ampliada do conteúdo de função e suas aplicações, potencializadas pelo envolvimento e engajamento deles na resolução da atividade.

## 5 Algumas Considerações

A partir do que foi exposto, percebemos com a aplicação dessa atividade grande motivação para realização do experimento, demonstraram curiosidade e interesse em descobrir as respostas. Além disso, os alunos superaram rapidamente as dificuldades iniciais em encontrar os dados e completar a tabela, demoraram mais para vencer as dificuldades em estabelecer as relações que o experimento mostrava, conseqüentemente apresentaram dificuldades em generalizar essas relações.

Com auxílio dos pibidianos e do professor supervisor, por meio de questionamentos, foi possível a eles definirem a equação que relacionava para cada caso e depois a função. Esta experiência foi proveitosa, pois percebeu-se que os alunos estavam entusiasmados por utilizar material manipulável na aula e construir o conhecimento a partir dela.

Dessa maneira a atividade proporcionou ainda a nós autores, uma experiência gratificante, que nos oportunizou trabalhar com os materiais manipuláveis e com uma metodologia de ensino diferente da tradicional, que é a Modelagem Matemática. Pretendemos utilizar a metodologia para outras atividades de intervenção em sala futuramente.

## Agradecimentos

Trabalho realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), entidade do governo brasileiro voltada para a formação de recursos humanos.

## Referências

- BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. **Anais...** Rio Janeiro: ANPED, 2001. 1 CD-ROM
- BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática na sala de aula. **Perspectiva**, Erechim (RS), v. 27, n. 98, p. 65-74, junho/2003.
- BLUM, W. Applications and Modelling in mathematics teaching and mathematics education - some important aspects of practice and of research. In: SLOYER, C. et al. **Advances and perspectives in the teaching of mathematical modelling and applications**. Yorklyn: Water Street Mathematics, 1995. p. 1-20.

- BRASIL. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+). Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias.** Brasília: MEC, 2006.
- BURAK, D. **Modelagem matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem.** Tese de Doutorado. Campinas, Unicamp, 1992.
- BURAK, D. Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. **Revista de Modelagem na Educação Matemática**, Guarapuava, v. 1, p.10-27, 2010.
- LORENZATO, Sergio. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, Sergio. **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** Campinas: Autores Associados, 2006. p. 3-37.
- MATOS, J. M.; SERRAZINA, M. L. **Didática da Matemática.** Lisboa: Universidade Aberta, 1996.
- MOREIRA, M. A. **O que é a Aprendizagem significativa afinal?** Instituto de Física. UFRGS. Porto Alegre- Rio Grande do Sul (2011).
- RODRIGUES, F. C.; GAZIRE, E. S. Reflexões sobre o uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão. **Revista Eletrônica de Educação Matemática: Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p.187-196, 2012. Anual.

## Configuração de parâmetro no algoritmo de agrupamento de dados baseado em formigas

André Wilson de Vicente<sup>1</sup>

UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Acadêmico do curso de Matemática  
madasenju63@gmail.com

Rosângela Villwock

UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Professora  
rosangela.villwock@unioeste.br

Carina Moreira Costa

UFPR - Universidade Federal Paraná - Mestranda em Matemática  
carinanpi@hotmail.com

**Resumo:** O método de agrupamento de dados baseado em formigas teve inspiração em colônias de formigas reais. Ainda precisa de muita investigação para se tornar uma boa ferramenta, mas conta com a vantagem do usuário não precisar informar o número de grupos. Uma desvantagem está na dificuldade de configurar os parâmetros do algoritmo. O objetivo deste trabalho foi melhorar a eficácia do algoritmo por meio de uma estratégia para configuração de um destes parâmetros. Usando bases de dados públicas e analisando a matriz de dissimilaridade foi definida uma estratégia para escolha do parâmetro que escala a dissimilaridade, sendo este o parâmetro mais difícil de calibração. Constatou-se a validade da estratégia proposta pois os resultados se aproximaram aos de outros autores. Assim, quando o usuário utilizar uma nova base de dados, poderá usar tal estratégia para definir o parâmetro.

**Palavras-chave:** Mineração de Dados; Meta-heurística.

### 1 Introdução

Com o avanço da tecnologia tornam-se mais acessíveis a coleta e o armazenamento de dados nas organizações, que reúnem grande quantidade dos mesmos. Por vezes, as técnicas existentes não são suficientes para transformar os dados em conhecimento, sendo necessária a utilização ou criação de novas ferramentas. Neste sentido, surge então a área de Mineração de Dados ou "Data Mining - DM" (HAN, KAMBER e PEI, 2012). A mineração de dados é uma das etapas do processo de Descoberta de Conhecimento em Base de Dados ou "Knowledge Discovery in Databases - KDD", que segundo Fayyad *et al.* (1996) é um processo não trivial para a descoberta de padrões, com a vantagem de não precisar de conhecimento prévio para extrair conhecimento.

O objetivo do KDD é extrair conhecimento útil de informações nos dados, que não estão explícitos. O processo é composto de cinco etapas: seleção de dados, onde são seletos os dados

<sup>1</sup>O autor agradece o apoio financeiro oferecido pela Fundação Araucária por meio de bolsa de iniciação científica.

de interesse; pré-processamento, onde dados inconsistentes são excluídos e as informações são ajustadas para melhorar a análise na etapa de mineração; formatação, na qual as variáveis são modificadas para se adaptar ao algoritmo; mineração de dados, na qual são extraídos padrões pelo algoritmo, sendo necessária a determinação da tarefa e do método a ser utilizado; avaliação, que visa legitimar o conhecimento resultante do processo e analisar a eficiência do método (FAYYAD *et al.*, 1996). A Figura 1 ilustra o processo.

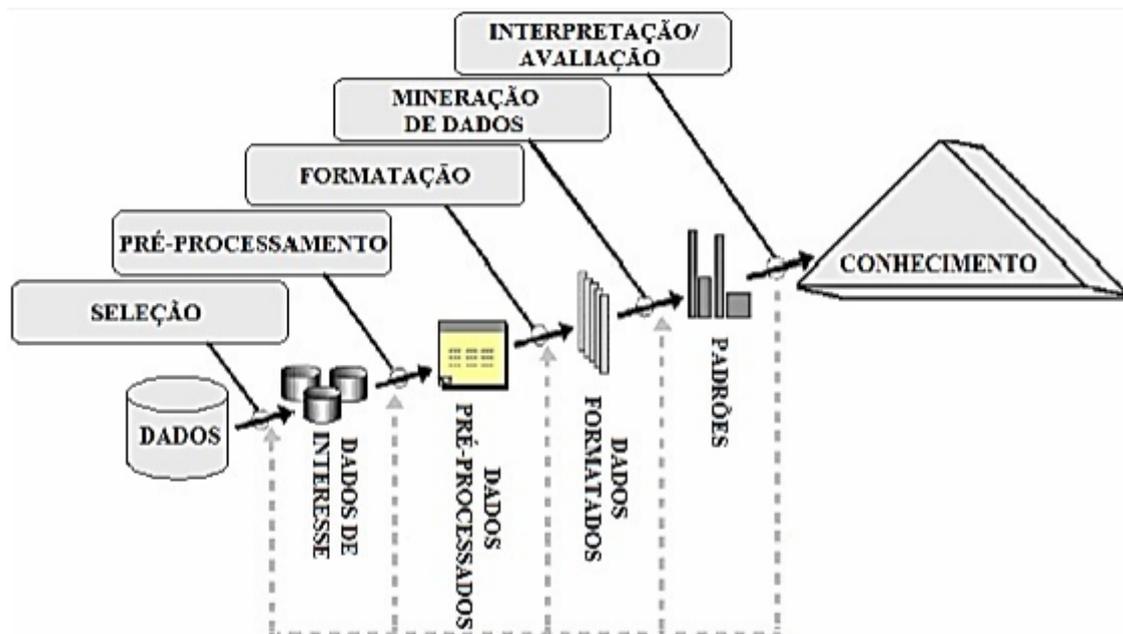


Figura 1: Etapas do processo de KDD (FAYYAD *et al.*, 1996).

A tarefa de Mineração de dados a ser aplicada é o agrupamento de dados, que consiste em separar os dados em grupos, de modo que dados similares fiquem no mesmo grupo e dados dissimilares fiquem em grupos diferentes. O método de agrupamento aqui utilizado é o agrupamento de dados baseado em formigas, que tem a vantagem de não precisar informar previamente o número de grupos existentes na base de dados, nem sempre conhecido. Porém, há a desvantagem de ter parâmetros que são difíceis de determinar, sendo que um bom ajuste destes é de extrema importância para garantir bons resultados.

Neste trabalho estudou-se a configuração e a calibração dos parâmetros do algoritmo, verificando se existe alguma relação destes com os dados que possa ser utilizada para estimá-los, melhorando assim os resultados do algoritmo. O objetivo desse trabalho foi melhorar a eficácia do algoritmo de agrupamento de dados baseado em formigas por meio de alternativas para melhorar o ajuste de um de seus parâmetros.

## 2 Agrupamento de dados baseado em Formigas

As formigas são bastante conhecidas pelo trabalho em grupo. Um exemplo é o cemitério formado pelas formigas da espécie *Pheidole pallidula*. Quando formigas operárias morrem, as

outras carregam os corpos para fora do formigueiro e descarregam probabilisticamente, de acordo com a quantidade de corpos que já estão no local, formando um monte (HARTMANN, 2005).

No agrupamento baseado em formigas proposto por Deneubourg *et al.* (1991), as formigas eram como agentes que se moviam em uma grade quadrada. Nessa grade haviam padrões que podiam ser carregados. A função dos agentes era carregar os padrões e descarregá-los de acordo com a similaridade, em que a probabilidade de padrões serem descarregados era maior perto de padrões similares, e menor caso os padrões fossem distintos.

## 2.1 Ajuste do parâmetro limitante de dissimilaridade

O parâmetro limitante de dissimilaridade é fundamental para o funcionamento do algoritmo, porém sua escolha não é algo trivial. Este parâmetro limita a dissimilaridade na função de vizinhança (Equação 1), sendo que, se for muito pequeno, não haverá formação de grupos e se for muito grande, os grupos se misturam.

$$f^*(i) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j \in L} \left[ 1 - \frac{d(i, j)}{\alpha} \right], & \text{se } \forall j \left( 1 - \frac{d(i, j)}{\alpha} \right) > 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (1)$$

onde  $\sigma^2$  é o tamanho da vizinhança da célula que o agente está (o agente se localiza no centro desta vizinhança e a percebe segundo o raio de percepção  $r = \frac{\sigma-1}{2}$ ),  $\alpha$  mede a distinção entre as distâncias dos padrões (limitante de dissimilaridade),  $L$  é a vizinhança e  $d(i, j)$  é a função de dissimilaridade entre os padrões  $i$  e  $j$ .

A restrição na Equação 1 foi proposta por Handl, Knowles e Dorigo (2006) para penalizar dissimilaridades elevadas. Os autores propuseram o seguinte esquema para seu ajuste do parâmetro limitante de dissimilaridade:

- Cada agente possui um valor distinto para  $\alpha$  em um intervalo  $(0,1]$ ,
- Após cada iteração efetiva ( $N_{efetivo}$ ), o agente terá seu parâmetro corrigido, e serão contabilizadas o número de falhas ( $N_{falhas}$ ),
- A taxa de falhas é calculada por  $(r_{falhas}) = \frac{N_{falhas}}{N_{efetivos}}$  com  $N_{efetivos}$  fixados em 100. Então, o parâmetro individual do agente é ajustado pela Equação 2:

$$\alpha \leftarrow \begin{cases} \alpha + 0,01 & \text{se } r_{falhas} > 0,99 \\ \alpha - 0,01 & \text{se } r_{falhas} \leq 0,99 \end{cases} \quad (2)$$

No entanto, Wang, Tu e Huang (2012) afirmam que esse cálculo na restrição pode não ser adequado em regiões com ruídos. Por exemplo, se na vizinhança de um padrão  $i$  tiver cinco itens similares a ele e dois padrões dissimilares, como na Figura 2, a função  $f^*(i)$  (Equação 1) retorna 0 e o padrão não é descarregado. Assim, os autores propuseram contabilizar o número

de itens similares ( $snum$ ) e o número de itens dissimilares ( $dnum$ ), sendo que se  $(1 - \frac{d(i,j)}{\alpha}) > 0$ , os padrões  $i$  e  $j$  são similares. Se  $snum > dnum$ , o padrão será descarregado no local.

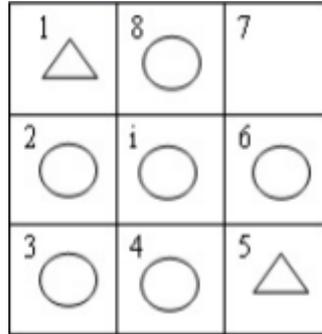


Figura 2: Possível situação de vizinhança em torno do item  $i$  (WANG, TU e HUANG, 2012)

No exemplo (Figura 2), os padrões 2, 3, 4, 6 e 8 são similares ( $snum = 5$ ) e os padrões 1 e 5 são dissimilares ( $dnum = 2$ ). Como  $snum > dnum$ , o padrão será descarregado no local.

### 3 Metodologia

Neste trabalho foi utilizado o método de agrupamento de dados baseado em formigas implementado na ferramenta YADMT (Yet Another Data Mining Tool), que está sendo desenvolvida na Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE, pelo Grupo de Pesquisa em Inteligência Aplicada (GIA).

O algoritmo inicia a tarefa de agrupamento dos dados utilizando os parâmetros raio de vizinhança e limitante de dissimilaridade inicial. Nessa fase inicial os valores desses parâmetros aumentam até atingir o valor máximo e, na fase final, decrescem até o valor de controle.

As probabilidades de carregar e descarregar padrões são dadas pelas Equações 3 e 4, respectivamente, propostas por Deneuborg *et al.* (1991).

$$P_{pick} = \left( \frac{k_p}{k_p + f(i)} \right)^2 \tag{3}$$

$$P_{drop} = \left( \frac{f(i)}{k_d + f(i)} \right)^2 \tag{4}$$

onde  $k_p$  e  $k_d$  são constantes reais, e  $f(i)$  é a estimativa da fração de padrões semelhantes ao padrão  $i$ . No caso, foi utilizada a função  $f^*(i)$ , proposta por Handl, Knowles e Dorigo (2006), descrita pela Equação 1.

Foi utilizada a distância Euclidiana para medir a dissimilaridade entre objetos, dada pela Equação 5.

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \quad (5)$$

O método utilizado para recuperação de grupos foi o Método de Ward, que define o número de grupos pela soma do quadrado do erro, garantindo menor perda da informação, ou seja, menor soma do quadrado do erro entre padrões e o centroide das partições em que cada um deles está contido.

O parâmetro raio de percepção da vizinhança pelo agente ( $r$ ) inicia em  $r_0$ , que é o valor mínimo para  $r$  na primeira fase do algoritmo, e é ajustado pelos parâmetros Vizinhança máxima, valor máximo que  $r$  irá atingir, e Controle de vizinhança, valor mínimo para  $r$  na segunda fase do algoritmo.

O parâmetro limitante de dissimilaridade ( $\alpha$ ) inicia em  $\alpha_0$ , que é o valor mínimo para  $\alpha$  na primeira fase do algoritmo, e é ajustado pelos parâmetros semelhança máxima e controle de semelhança.

O parâmetro Fase diz a porcentagem de iterações em que  $r$  e  $\alpha$  irão aumentar até atingir o valor máximo (denominada primeira fase). Na segunda fase do algoritmo o valor máximo irá diminuir até atingir o valor de controle. Para o ajuste de  $r$  é usada uma progressão geométrica e para o ajuste de  $\alpha$ , uma progressão aritmética.

Nos experimentos que foram realizados com o objetivo de melhorar o ajuste do parâmetro do algoritmo para cada base de dados, foram utilizadas as bases de dados públicas IRIS, ZOO, WINE e PIMA Indians Diabetes, disponíveis em <http://mllearn.ics.uci.edu/databases>. Por haver grande mudança nos resultados, o algoritmo foi aplicado dez vezes para cada configuração, fazendo-se a média e o desvio padrão das medidas de avaliação.

O parâmetro escolhido para estudo foi o limitante de dissimilaridade ( $\alpha$ ), sendo este estimado a partir da matriz de dissimilaridade, que mostra as distâncias entre os padrões, normalizadas no intervalo  $[0, 1]$ . Além disso, foi observada a restrição proposta por Handl, Knowles e Dorigo (2006) descrita na Equação 1.

Para cada base de dados  $\alpha$  possui um valor diferente, estimado pela porcentagem de distâncias entre padrões maiores que um limite (candidato a  $\alpha$ ), sendo este contido no intervalo de  $[0, 1; 0, 9]$ , considerando variação de 0,01. O valor de  $\alpha$  foi escolhido como o valor que melhor diferenciava os dados, com cerca de 50% das distâncias entre padrões maiores que ele. O parâmetro  $\alpha_{m\acute{a}x}$  foi definido num intervalo de valores tal que os limites inferior e superior tem porcentagens de distâncias entre padrões maiores do que eles em aproximados 60% e 80% (por exemplo, no caso da IRIS os limites inferior e superior foram 0,46 e 0,6, respectivamente). Na fase final, o valor diminui até o controle  $\alpha$ , escolhido num intervalo tal que os limites inferior e superior das porcentagens de distâncias entre padrões maiores do que ele eram de 20% e 30% aproximadamente (no caso da IRIS, os limites inferior e superior foram 0,14 e 0,19, respectivamente). A Figura 3 ilustra esta descrição.

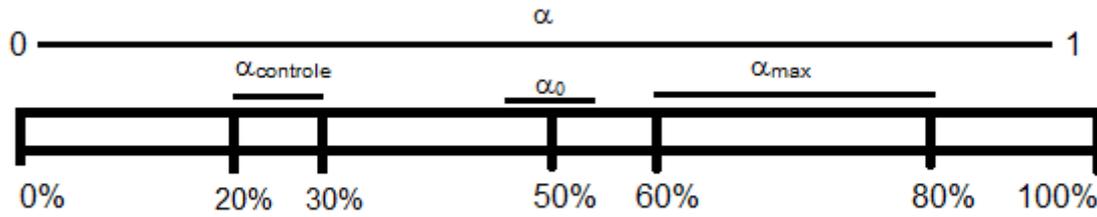


Figura 3: Definição do parâmetro  $\alpha$

O parâmetro  $r$  foi definido empiricamente, experimentando valores da literatura e testando se esse valor deveria decrescer na fase final do algoritmo. O parâmetro  $\alpha$  foi escolhido em um intervalo de valores, definido empiricamente com testes, segundo a estratégia definida acima.

## 4 Resultados e discussão

No Quadro 1 são apresentadas as configurações utilizadas em cada base de dados e no Quadro 2 apresenta-se a comparação dos resultados obtidos pelo ACAM proposto por Boryczka (2009) com os resultados obtidos na implementação da ferramenta YADMT, com a configuração padrão e utilizando da estratégia proposta.

Parâmetros	Iris	Wine	Pima	Zoo
Função vizinhança ( $r_0$ )	1	1	1	1
Vizinhança máxima ( $r_{m\acute{a}x}$ )	4	1	3	1
Vizinhança mínima ( $r_{m\acute{i}n}$ )	1	1	1	1
Controle de vizinhança ( $r_{control e}$ )	2	1	2	1
Função semelhança ( $\alpha_0$ )	0.3	0.55	0.3	0.66
Semelhança máxima ( $\alpha_{m\acute{a}x}$ )	0.47	0.58	0.5	0.78
Semelhança mínima ( $\alpha_{m\acute{i}n}$ )	0.3	0.55	0.3	0.66
Controle de semelhança ( $\alpha_{control e}$ )	0.19	0.32	0.27	0.38

Quadro 1: Melhor configuração para cada base de dados

Utilizando o algoritmo com a estratégia apresentada em comparação com os resultados apresentados por Boryczka (2009), se percebe que para a base de dados IRIS a diferença foi menor que 4% para as três medidas de avaliação, para a WINE a diferença foi menor que 9% para as medidas de avaliação, para a ZOO a diferença foi maior que 10% para duas das medidas de avaliação e para a PIMA em apenas uma medida de avaliação a diferença foi maior que 10% e em outra medida a diferença foi menor que 1%.

Bases	Medidas de avaliação	ACAM	Algoritmo com as estratégias propostas	Configuração padrão YADMT
IRIS	R	0,819	0,790 (-3,54%)	0,581
	F	0,810	0,785 (-3,09%)	0,489
	Porcentagem de acerto (%)	81,3	78,3 (-3,73%)	45,2
WINE	R	0,849	0,785 (-7,54%)	0,555
	F	0,868	0,799 (-7,95%)	0,477
	Porcentagem de acerto (%)	86,1	78,4 (-8,98%)	46,2
ZOO	R	0,889	0,830 (-6,64%)	0,746
	F	0,774	0,672 (-13,18%)	0,493
	Porcentagem de acerto (%)	76,7	56,6 (-26,16%)	38,6
PIMA	R	0,522	0,552 (5,75%)	0,509
	F	0,574	0,663 (15,51%)	0,585
	Porcentagem de acerto (%)	66,3	66,1 (-0,31%)	55,5

Quadro 2: Comparação dos resultados médios da aplicação do algoritmo com resultados disponíveis em Boryczka (2009) e resultados apresentados pela YADMT utilizando-se a configuração padrão.

Comparando-se com os resultados utilizando a configuração inicial (padrão) da YADMT, os resultados são bem melhores, mostrando que a estratégia foi eficiente e, portanto, pode ser uma sugestão a iniciantes no uso do algoritmo.

## 5 Considerações finais

O objetivo do trabalho foi estudar o algoritmo realizando experiências para criar uma estratégia a fim de estimar um parâmetro em busca de melhores resultados. Para isso, foram usadas quatro bases de dados públicas para os experimentos.

O parâmetro que demonstrou maior dificuldade de calibragem foi o limitante de dissimilaridade  $\alpha$ . Por ter grande dependência dos dados, definiram-se valores distintos para cada parâmetro para cada base de dados.

A estratégia de usar a matriz de dissimilaridade foi válida e útil, pois é uma maneira simples para configurar o parâmetro e mostrou bons resultados quando comparado a execuções que usam a configuração padrão do algoritmo, tornando-se um bom ponto de partida para trabalhar com bases de dados inéditas, diminuindo a quantidade de experimentos que serão realizados para ajuste do parâmetro.

A contribuição deste trabalho foi a apresentação de uma estratégia para definir um parâmetro importante do algoritmo.

## Agradecimentos

Os autores agradecem à Fundação Araucária por bolsa de iniciação científica concedida ao primeiro autor e pelo apoio financeiro ao projeto de pesquisa “Identificação do Perfil dos Municípios do Estado do Paraná por meio do Processo de Descoberta de Conhecimento em Bases de Dados”.

## Referências

- BORYCZKA, U.. Finding groups in data: Cluster analysis with ants. **Applied Soft Computing** **9**, 61-70, 2009
- DENEUBOURG, J. L.; GOSS, S.; FRANKS, N.; SENDOVA-FRANKS, A.; DETRAIN, C.; CHRETIEN, L. The dynamics of collective sorting: Robot-like ants and ant-like robots. **Proceedings of the First International Conference on Simulation of Adaptive Behaviour: From Animals to Animats 1**, 356 - 365, 1991.
- FAYYAD, U. M.; PIATETSKY-SHAPIRO, G.; SMYTH, P.; Uthurusamy, R. **Advances in Knowledge Discovery & Data Mining**. California: AAAI/MIT, 1996.
- HAN, J.; KAMBER, M.; PEI, J.. **Data Mining: Concepts and Techniques**. 3. ed. Waltham: Morgan Kaufmann Publishers, 2012.
- HANDL, J.; KNOWLES, J.; DORIGO, M. Ant-based clustering: a comparative study of its relative performance with respect to k-means, average link and 1d-som. **Technical Report 24**, IRIDIA, Université Libre de Bruxelles, Belgium, 2003.
- HARTMANN, V.. Evolving agents warms for clustering and sorting. **Proceedings of the 2005 Conference on Genetic and Evolutionary Computation**, 217-224, Washington DC, 2005.
- WANG, T.; TU, A.; HUANG, H. An Ant Colony Clustering Algorithm Improved from ATTA. **International Conference on Applied Physics and Industrial Engineering: Physics Procedia** **24**, 1414 - 1421, 2012.

## O problema das três casas

Thalia Falquievicz Corassa  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste  
thaliacorassa@hotmail.com

Fabiana Magda Garcia Papani  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste  
fgarciapapani@gmail.com

**Resumo:** A Teoria dos Grafos teve início com o matemático suíço Leonhard Euler (1707 - 1783) em 1736, por meio do problema das sete pontes de Königsberg. Grafos são relevantes na resolução de vários tipos de problemas, dos relacionados ao cotidiano das pessoas até aqueles encontrados nos mais diversos ramos das Ciências. Este trabalho tem como objetivo explorar os principais conceitos e propriedades necessários ao entendimento e resolução do problema das três casas, que requer o emprego do Teorema de Euler, um dos importantes resultados da Teoria dos grafos.

**Palavras-chave:** Grafos; Resolução de Problemas; Teorema de Euler.

### 1 Introdução

Este trabalho aborda a Teoria dos grafos que pode ser aplicada em distintas Áreas do conhecimento. As ideias básicas de grafos foram introduzidas no século XVIII pelo famoso matemático suíço Leonhard Euler. Ele usou grafos para resolver o problema hoje conhecido como "As sete pontes de Königsberg". A cidade de Königsberg, atual Kaliningrado, é cortada pelo Rio Prególia, onde existem duas grandes ilhas que, juntas, formam um complexo que na época continha sete pontes, conforme ilustrado pela Figura 1. O desafio era verificar a possibilidade de entrar e sair da cidade atravessando apenas uma vez todas as sete pontes. Euler mostrou que era impossível empregando argumentos que são essenciais à Teoria dos grafos.

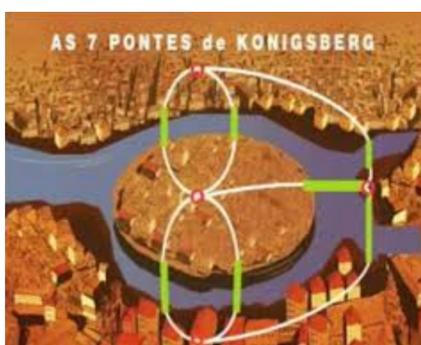


Figura 1: Esquema das pontes de Königsberg.

Fonte: Adaptado de [www.youtube.com/watch?v=ucMkruEYG9c](http://www.youtube.com/watch?v=ucMkruEYG9c).

Até há pouco tempo, a teoria dos grafos era apreciada mais como um entretenimento matemático do que como uma teoria. Porém, com o grande avanço tecnológico a Teoria dos grafos passou a ser usada para resolver problemas em muitos campos. Problemas que muitas vezes apresentam enunciados simples, porém soluções complexas. Problemas com aplicações importantes e variadas, tais como:

- Em um computador, por exemplo, podem ser armazenados vários dados em “arquivos”. Este arquivo tem uma “estrutura de árvore”, isto é, uma estrutura que é um certo tipo de grafo. O enigma é determinar qual o “caminho” mais breve para chegar a um dos dados armazenado neste arquivo;
- Problemas de recolhimento de lixo de uma cidade, feito por um caminhão. Uma maneira de economizar recursos públicos seria fazer o caminhão passar uma única vez por cada rua e retornar ao ponto de partida, um problema bastante parecido com o das “sete pontes”;
- Nas redes de comunicações, nas rotas de distribuição de produtos ou serviços, como dutos de gás ou água, a distribuição de correio, nas redes de distribuição de energia de uma região qualquer do Brasil, entre outros, em que os grafos minimizam percursos de forma a aperfeiçoar as deslocamentos;
- A estrutura química de uma molécula pode ser representada por um grafo;
- Os movimentos de uma peça em um jogo de xadrez.

Como os exemplos citados anteriormente podemos perceber que grafos podem ser utilizados de forma muito significativa para resolver desde de problemas do nosso cotidiano, que muitas vezes apresentam-se perante os nossos olhos e nós nem reparamos, até problemas de grande interesse científico.

Pretende-se nesse trabalho fornecer uma introdução à teoria dos grafos, apresentando definições, propriedades e os principais resultados necessários para resolver o problema das três casas, incluindo o Teorema de Euler. O artigo será dividido como segue: na Seção 2 apresentaremos definições, propriedades e resultados importantes à teoria dos grafos e na Seção 3, apresentaremos o problemas das três casas bem como uma justificativa da insolubilidade do mesmo.

## 2 Grafos

**Definição 1.** Um Grafo  $G(V, A)$  é uma estrutura matemática constituída pelos conjuntos  $V$ , finito e não vazio, de elementos denominados vértices e  $A$ , constituído de pares não ordenados de elementos de  $V$ . Os elementos de  $A$  são denominados arestas.

Grafos são estruturas muito usadas para representar a existência ou não de relações entre elementos de um dado conjunto. Os vértices representam os elementos do conjunto e as

relações entre esses elementos podem ser representadas por uma lista, dizendo quais vértices estão relacionados. Podemos ainda apresentar um grafo utilizando uma representação. Desta forma, o que nos interessa num grafo é saber quem são os vértices e que pares de vértices estão ou não ligados. Veja o exemplo 2,

**Exemplo 2.** Uma rede de comunicação tem cinco estações de transmissão. Existe transmissão direta entre algumas estações. O grafo a seguir representa esta situação, isto é, se existe aresta entre dois vértices é porque as estações representadas por estes vértices transmitem diretamente uma para outra, caso contrário não existe transmissão direta. Neste exemplo temos  $G = (V, A)$ , em que  $V = \{E1, E2, E3, E4, E5\}$  e  $A = \{E1E2, E1E3, E1E4, E1E5, E2E4, E3E4, E4E5\}$ . Geometricamente,

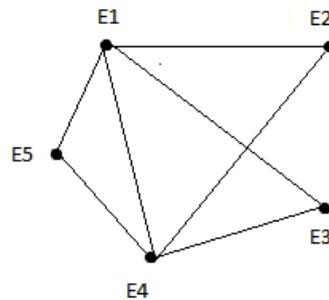


Figura 2: Grafo das transmissões diretas  
Fonte: Elaborada pelos autores.

**Definição 3.** O número de arestas que incidem sobre um determinado vértice é chamado grau do vértice.

**Exemplo 4.** No exemplo anterior os vértices  $E2, E3$  e  $E5$  possuem grau 2, e os vértices  $E1$  e  $E4$  possuem grau 4.

**Definição 5.** Se todos os vértices de um grafo possuem grau  $p$  dizemos que o grafo é regular de grau  $p$

**Definição 6.** Um ciclo é um grafo conexo regular de grau 2. Um caminho é um ciclo do qual retiramos uma aresta. Uma árvore é um grafo conexo sem ciclos.

**Exemplo 7.** Os grafos da Figura 3 são exemplos de ciclos, os grafos da Figura 4 são exemplos de caminhos e os grafos da Figura 5 são exemplos de árvores.

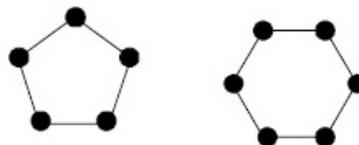


Figura 3: Exemplos de ciclos.  
Fonte: JURKIEWICZ (2009)

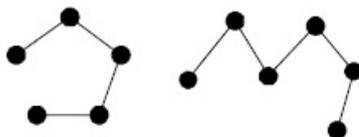


Figura 4: Exemplos de caminhos  
Fonte: JURKIEWICZ (2009)

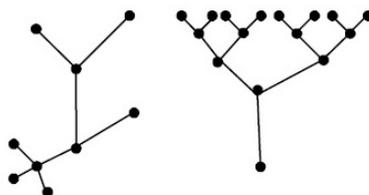


Figura 5: Exemplos de árvores  
Fonte: JURKIEWICZ (2009)

**Definição 8.** Dizemos que um grafo é conexo se qualquer par de pontos é ligado por ao menos um caminho.

**Exemplo 9.** Como exemplo de grafos conexos temos os dois primeiros grafos da Figura 6. Enquanto o terceiro grafo da Figura 6 é um exemplo de grafo desconexo.

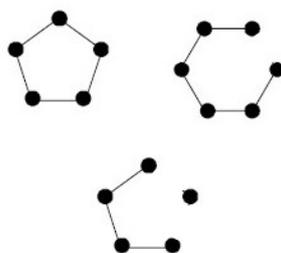


Figura 6: Exemplos de grafos conexo e desconexo  
Fonte: Adaptada de JURKIEWICZ (2009)

**Definição 10.** Um grafo é planar quando admite uma representação gráfica em que as arestas só se encontrem possivelmente nos vértices a que são incidentes, ou seja, não há o cruzamento de arestas.

**Exemplo 11.** Exemplos clássicos de grafos planares são dados pelos grafos que representados por poliedros, veja a Figura 7 a seguir,

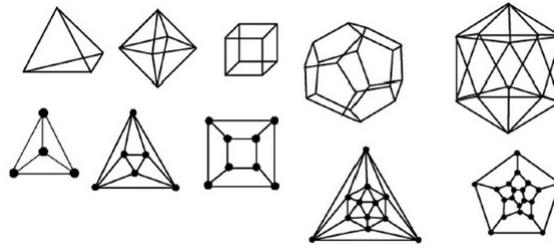


Figura 7: Exemplos de grafos planares  
 Fonte: JURKIEWICZ (2009)

**Definição 12.** Uma representação gráfica de um grafo com pelo menos um ciclo separa o plano em regiões, uma das regiões é ilimitada. No caso dos caminhos ou árvores, temos uma única região, ilimitada.

**Exemplo 13.** O grafo apresentado na Figura 8 possui 8 vértices, 12 arestas e separa o plano em 6 regiões.

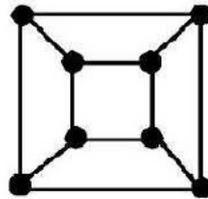


Figura 8: Exemplo de grafo planar  
 Fonte: Adaptada de JURKIEWICZ (2009)

**Teorema 14. (Fórmula de Euler)** Seja  $G$  um grafo planar conexo com  $v$  vértices,  $a$  arestas e que divide o plano em  $r$  regiões. Então  $v - a + r = 2$ .

*Prova.* Demonstraremos o teorema por indução sobre o número de arestas. Para facilitar a notação denotaremos por  $G_n$  um gráfico com  $n$  arestas e de  $v_n$ ,  $a_n$  e  $r_n$  o números de vértices, arestas e regiões do grafo  $G_n$ .

- Se  $G$  tiver apenas uma aresta, veja a Figura 9 a relação é verdadeira, pois,  $v = 2$ ,  $a = 1$  e  $r = 1$ . Logo  $v - a + r = 2 - 1 + 1 = 2$ .



Figura 9: Representação de  $G_1$   
 Fonte: Elaborada pelo autor

- Suponhamos, por hipótese de indução, a relação verdadeira para um grafo com  $k$  arestas, isto é,  $v_k - a_k + r_k = 2$ .

- Devemos provar que a relação continua válida para  $G_{k+1}$ , isto é, devemos provar que  $v_{k+1} - a_{k+1} + r_{k+1} = 2$ . Vamos acrescentar uma aresta a  $G_k$  para obter  $G_{k+1}$ . Existem duas situações a considerar:

- Situação 1: Os dois vértices da nova aresta pertencem a  $G_k$ . Esses dois vértices devem estar na fronteira de uma região  $R$ , pois caso contrário não seria possível acrescentar a aresta sem haver um cruzamento, e lembrem-se os grafos são planares. Deste modo, a adição desta nova aresta divide  $R$  em duas regiões, veja a Figura 10 e conseqüentemente  $v_{k+1} = v_k$ ,  $a_{k+1} = a_k + 1$  e  $r_{k+1} = r_k + 1$ . Assim,  $v_{k+1} - a_{k+1} + r_{k+1} = v_k - (a_k + 1) + (r_k + 1) = v_k - a_k + r_k$ . Como, por hipótese de indução, temos que  $v_k - a_k + r_k = 2$ , concluímos que  $v_{k+1} - a_{k+1} + r_{k+1} = 2$ .

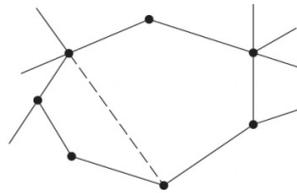


Figura 10: Representação da Situação 1  
Fonte: [www.dcc.ufmg.br](http://www.dcc.ufmg.br)

- Situação 2: Um dos vértices da nova aresta não está em  $G_k$ . Neste caso a nova aresta não gera novas regiões, veja a Figura 11 e conseqüentemente,  $v_{k+1} = v_k + 1$ ,  $a_{k+1} = a_k + 1$  e  $r_{k+1} = r_k$ . Assim,  $v_{k+1} - a_{k+1} + r_{k+1} = (v_k + 1) - (a_k + 1) + r_k = v_k - a_k + r_k = 2$ .

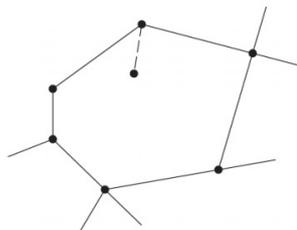


Figura 11: Representação da Situação 2  
Fonte: [www.dcc.ufmg.br](http://www.dcc.ufmg.br)

□

### 3 O problema

O chamado problema das três casas, é um problema matemático clássico, que pode ser enunciado da seguinte forma:

Suponha que haja três casas em um plano e que cada uma precisa ser ligada a três empresas: uma de gás, uma de água e uma de eletricidade, veja a Figura 12. Se o uso da uma

terceira dimensão não é permitido, isto é, todas as ligações, fios e canos devem estar situados em um mesmo plano, é possível fazer essas ligações sem que as linhas se cruzem?

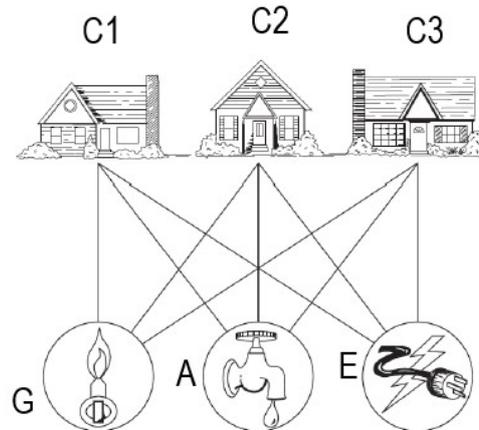


Figura 12: Situação representada geometricamente

Fonte: [www.dcc.ufmg.br](http://www.dcc.ufmg.br)

*Prova.* O problema é verificar se o grafo de vértices  $C1, C2, C3, G, A$  e  $E$  e arestas  $GC1, GC2, GC3, AC1, AC2, AC3, EC1, EC2$  e  $EC3$  é ou não grafo planar.

Suponhamos que ele seja planar. Pela fórmula de Euler, devemos ter  $v - a + r = 2$ , em que  $v$  é o número de vértices,  $a$  é o número de arestas e  $r$  é o número de regiões do plano limitadas pelas arestas. Assim, no caso estudado temos que  $r = 2 - 6 + 9 = 5$ , isto é, se o grafo em questão for plana ele terá 5 regiões.

Por outro lado, nenhuma das três casas se ligará a outra e nenhuma das três distribuidoras ( de água, eletricidade ou gás) se ligará a outra distribuidora e portanto não existem regiões triangulares no grafo. Sendo assim o menor grau de uma região é 4.

Além disso, em um grafo planar conexo, cada aresta divide exatamente duas regiões. Assim, e grafos planares  $S_g$  conexos, se somarmos os graus das regiões cada aresta será contada duas vezes e portanto a soma dos graus das regiões é igual a duas vezes o número de arestas,  $S_g = 2a$ . Assim, no nosso problemas por um lado temos  $S_g = 18$ , pois temos 9 arestas no grafo e por outro lado  $S_g \geq 20$ , pois temos 5 regiões de grau maior ou igual a 4. Portanto temos uma contradição, que surgiu do fato de supormos que o grafo em questão é planar.

Logo o grafo não é planar, e concluímos que é impossível fazer todas as ligações, com todos os canos situados em um plano, sem que as linhas se cruzem.  $\square$

## 4 Conclusões

O que apresentamos neste artigo é resultado de estudos iniciais do trabalho de iniciação científica que começou a ser desenvolvido em junho do presente ano. Acreditamos que com o

problema apresentado pudemos convencer o leitor de que a Teoria dos grafos é uma ferramenta matemática muito útil na resolução de problemas, e de que embora, de um modo geral os problemas abordados, apresentem enunciados de fácil compreensão, a matemática necessária para resolvê-los geralmente requer conceitos mais elaborados.

## Referências

- CAVALCANTE, F.N.S.; SILVA da, S.D. Grafos e suas Aplicações. Trabalho de Conclusão de Curso. São Paulo: Centro Universitário Adventista de São Paulo, 2009.
- FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. Círculos Matemáticos: A Experiência Russa. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- JURKIEWICZ, S. Grafos: Uma Introdução. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- SOUZA de, R. F. Resolução de problemas via teoria de grafos. Dissertação de Mestrado. Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação. São Carlos: USP, 2014.

## A igualdade para alunos do Ensino Fundamental

Sônia Cristina Maciel  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste  
sristina.maciel@gmail.com

Andréia Büttner Ciani  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste  
andbciani@gmail.com

**Resumo:** O presente artigo faz parte de um projeto de pesquisa em andamento no curso de Especialização no Ensino de Ciências e Matemática da Unioeste. A pesquisa busca compreender as maneiras que um grupo de alunos lida com o sinal de “=” e o significado por eles atribuído a este símbolo, em um contexto de Matemática. Tal pesquisa está sendo realizada com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual localizada no município de Santa Tereza do Oeste.

**Palavras-chave:** Sinal de igual; igualdade; sentenças matemáticas.

### 1 Introdução

Utilizamos sentenças para nos comunicar tanto na linguagem escrita quanto na linguagem falada. A Matemática também se vale de sentenças para efetivar a comunicação. No entanto, a Matemática conta com uma gama de símbolos que são utilizados no lugar de palavras. Um destes símbolos é o sinal de igual, representado por meio de duas retas paralelas, “=”. Em grande parte das sentenças matemáticas este símbolo se faz presente.

Uma sentença de igualdade, necessariamente requer a utilização do símbolo “=”, o qual foi apresentado nesta forma pelo matemático Robert Record (1510-1558) e não teve uma aceitação imediata. Segundo este Matemático, duas retas paralelas foram escolhidas como símbolo por não haver duas outras mais parecidas do que duas retas paralelas. (CAJORI, 2007 apud COSME, 2010). Porém, até chegar a esta representação a igualdade em Matemática foi representada de diversas maneiras, sendo por muito tempo representada por palavras. Além disso, o símbolo com duas retas paralelas já foi utilizado com outros significados na Matemática. Por exemplo,

Descartes usou o símbolo ‘=’ para designar mais ou menos, isto é, ‘±’. Johann Caramuel o empregou para separar as partes inteira e decimal de números racionais: para ele ‘102=857’ significava 102 inteiros e 857 milésimos (hoje expresso por 102,857). (COSME, 2010, p. 82).

Segundo Davis e Hersh (1981, p. 125 apud Saenz- Ludlow e Walgamuth, 1998, p. 154)

Construir significados matemáticos a partir de símbolos é um processo cognitivo complexo, o processo de interpretação, “Interpretar um símbolo é associá-lo à consciência humana”. As regras de cálculo deveriam ser tão precisas como um funcionamento de um computador; as regras para interpretação não podem ser mais precisas do que a comunicação de ideias entre os seres humanos’.

De acordo com McNeil e Alibali (2005), a maneira que os alunos entendem a utilização do sinal de igual justifica-se às experiências matemáticas que vivenciam no ensino básico.

Já Trivilin (2013) afirma que é na formação de professores que precisa ser discutida a dificuldade em compreender e utilizar situações matemáticas que favoreçam o desenvolvimento dos diferentes significados do sinal de igualdade.

A maneira que os alunos lidam com sentenças matemáticas que incluem o sinal de igual vem se consolidando ao longo de sua caminhada escolar desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Porém, de uma maneira geral, durante muitos anos, nas aulas de Matemática, no período escolar 7º ano do Ensino Fundamental, aconteceu nas aulas de Matemática, o primeiro contato “oficial” com a Álgebra, apesar do pensamento algébrico já ser introduzido anteriormente. Esta experiência se inicia com o conteúdo de equações. Algumas pesquisas, como por exemplo, as de Brito Lima (1996) e Lessa (1996), mostram diversas dificuldades na aprendizagem do conceito de equações, os estudos apontam que parte dessa dificuldade se deve à mudança de significado do sinal de igual.

De acordo com as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná na Educação Básica, no contexto da Educação Matemática, é necessário que os números e a álgebra sejam compreendidos de forma ampla, para que se analisem e descrevam relações em vários contextos, nos quais se situam as abordagens matemáticas, explorando os significados que possam ser produzidos a partir deste conteúdo. (PARANÁ, 2008).

Ponte, Branco e Matos (2009) apontam três significados que podem ser atribuídos ao sinal de igual: noção operacional, ideia de equivalência e noção relacional. Estes são significados que esperaríamos de nossos estudantes. No entanto, no dia a dia da sala de aula, outros significados são atribuídos e o sinal de igual acaba sendo utilizado de diversas maneiras.

A noção operacional tem o sentido de um símbolo que sugere uma ação a ser realizada. As crianças percebem o sinal de igualdade como um sinal de fazer algo. (BEHR; ERLWANGER; NICHOLS, 1980).

Já a ideia de equivalência envolve o sinal de igual como uma relação de mesmo valor, Lessa (1996) utilizou a metáfora da balança para desenvolver a noção de equivalência do sinal de igualdade.

Tinoco et al (2008) destaca a noção de equivalência representada pelo sinal de igualdade na Álgebra, apontando que

O aluno com experiência apenas em aritmética considera, muitas vezes, o sinal de igual como um símbolo unidirecional, que precede uma resposta numérica, um símbolo para ‘escreva a resposta’ [...] Embora seja essencial nas atividades algébricas, os alunos não se apropriam com facilidade da ideia do sinal de igualdade, visto como indicador de uma equivalência entre duas expressões, mesmo que numéricas. É preciso trabalho específico neste sentido. (TINOCO, 2008, p. 3-4).

E a noção relacional pode ser identificada nos casos que o sinal de igual é utilizado para

representar uma igualdade de expressões.

Ponte, Branco e Matos (2009), na brochura *Álgebra no Ensino Básico*, consideram fundamental que os alunos explorem situações nas quais o sinal de igual surja com significados distintos, nomeadamente, como operador a indicar uma equivalência entre dois objetos matemáticos ou expressões ou para definir uma relação funcional.

## 2 Procedimentos Metodológicos

A presente investigação qualitativa busca resgatar alguns dos significados atribuídos ao símbolo de igual e a maneira que o utilizam um grupo de alunos de diferentes turmas do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual, onde a primeira autora é a professora de Matemática das turmas.

Em um primeiro momento, foi lançada a seguinte questão aos alunos da referida escola: Qual o significado do sinal de igualdade? Explique e dê um exemplo.

Salienta-se ainda que o ensino só tenha significado quando proporciona a descoberta, quando se estimula a curiosidade, sem isso ele não tem sentido, como define Freire (1996, p. 29):

Não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino. Esses que-fazer-se encontram um no corpo do outro. Enquanto ensino, continuo buscando, reprocurando. Ensino porque busco, porque indaguei, porque indago e me indago. Pesquiso para constatar, constatando, intervenho, intervindo educo e me educo. Pesquiso para conhecer o que ainda não conheço e comunicar ou anunciar a novidade (FREIRE, 1996, p.32).

A primeira etapa da pesquisa consistiu em realizar um levantamento de artigos científicos publicados que tratam do sinal de igualdade. Permitindo uma revisão teórica a respeito da utilização do sinal igual e reflexões sobre os estudos de autores que já buscaram compreendê-lo.

De acordo com Marconi e Lakatos (2008), a pesquisa qualitativa possibilita o pensamento reflexivo dos sujeitos sobre as experiências e busca

[...] aprofundar a compreensão dos fenômenos que investiga a partir de uma análise rigorosa e criteriosa desse tipo de informação, isto é, não pretende testar hipóteses para comprová-las ou refutá-las ao final da pesquisa; a intenção é a compreensão (MOARAES, 2003, p. 191).

O colégio escolhido para ser realizada a pesquisa está localizado no município de Santa Tereza do Oeste. Fundado em 1989 após a emancipação política da cidade o Colégio Estadual Santa Tereza do Oeste Ensino Fundamental e Médio, possui 1003 alunos distribuídos em 43 turmas e funciona nos três períodos. A pesquisa está sendo realizada com três turmas de 7º ano do Ensino Fundamental, sendo uma do período matutino e duas do período vespertino. Ao total, participam 85 alunos. Não existem turmas no período noturno do 7º na escola.

Diversos trabalhos se valem da análise da produção escrita. Celeste (2008) afirma que a análise da produção escrita serve para conhecer as estratégias, dificuldades e erros apresentados pelos alunos. Em sua dissertação a autora analisa a produção escrita de estudantes do Ensino

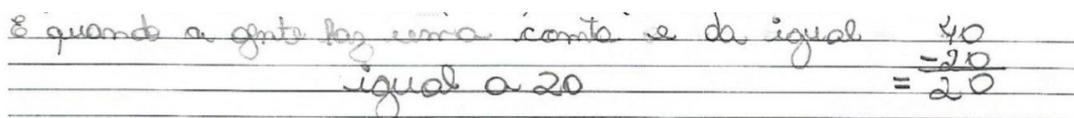
Fundamental em situação de avaliação. Já Santos (2008) defende ser uma prática a ser adotada pelo professor em sala de aula, para entender a forma de pensar de cada um de seus alunos.

Temos como objetivo, na segunda etapa do projeto analisar as respostas sobre como esse grupo de alunos do 7º ano compreende sobre o significado do sinal de igual. Para isso também faremos uso da análise da produção escrita.

Para identificar da produção escrita dos alunos, atribuímos uma letra seguida de um número para a produção de cada um. No caso a letra A seguida do um número 1. Assim, chamamos o primeiro aluno de A1.

### 3 Considerações Parciais

Em sua produção A1 afirma que a utilização acontece quando se faz uma operação se obtém o resultado. Ao lado A1 registra um “cálculo armado” de 40 menos 20, colocando o sinal se subtrair, um traço e embaixo o resultado, 20. Próximo ao traço, ao lado da resposta o sinal de igual. Parece que o aluno considera que respondeu e forneceu um exemplo. Sendo a parte da resposta em escrita corrida e o exemplo com a conta armada.



É quando a gente faz uma conta e dá igual

$$\begin{array}{r} 40 \\ - 20 \\ \hline = 20 \end{array}$$

Figura 1: Produção escrita do aluno A1

O aluno explica o significado do sinal apenas por meio de um exemplo operacional. Parece haver a necessidade de uma operação para que o sinal seja útil. Também pode ser interpretado como quando há necessidade de se indicar um resultado.

A segunda etapa da pesquisa ainda segue em andamento, porém ressaltamos que ao concluir essa etapa, que trata da análise da primeira resposta dos alunos sobre a compreensão dos significados do sinal de igualdade. Disseminaremos questões com operações matemáticas.

Diante da pesquisa e análise da produção escrita realizada até o momento, percebemos o quanto ainda é complexo para os alunos do sétimo ano do ensino fundamental a compreensão da utilização do sinal de igual.

### Referências

- CAJORI, F. **Uma história da Matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.
- CELESTE, L. B. **A Produção escrita de alunos do Ensino Fundamental em questões de matemática do PISA**. 2008. 85f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2008.

- COSME, V. V. Um passeio pela história de símbolos que representaram igualdade matemática. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 10, n. 19, p. 75-87, abr./set. 2010. Disponível em: <[http://www.rbhm.org.br/issues/RBHM%20-%20vol.10,%20no19,%20abril%20\(2010\)/4%20-%20Vanessa%20-%20final.pdf](http://www.rbhm.org.br/issues/RBHM%20-%20vol.10,%20no19,%20abril%20(2010)/4%20-%20Vanessa%20-%20final.pdf)>. Acesso em: 23 set. 2017.
- FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. 7. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1998.
- LESSA, M. M. L. **Balança de dois pratos e problemas verbais como ambientes didáticos para iniciação à Álgebra: um estudo comparativo**. 1996. 236f, Dissertação (Mestrado em Psicologia) - Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife-PE, 1996.
- MCNEIL, N.; ALIBALI, M. Knowledge change as a function of mathematics experience: All contexts are not created equal. **Journal of Cognition and Development**, v. 6, n. 2, p. 285-306, 2005.
- MARCONI, M. de A.; LAKATOS, E. M. Técnicas de pesquisa. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2008.
- MORAES, R. Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 9, n. 2, p. 191-211, 2003
- PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Departamento da Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica: Matemática**. Curitiba: SEED-PR, 2008.
- PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**. 2009.
- SÁENZ-LUDLOW, A.; WALGAMUTH, C. Third graders' interpretations of equality and the equal symbol. **Educational Studies in Mathematics**, v. 35, p. 153-187, 1998.
- SANTOS, E. R. dos. **Estudo da produção escrita de alunos do Ensino Médio em questões discursivas não rotineiras de matemática**. 2008. 166f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2008.
- TINOCO et al. Caminho da álgebra na escola básica. IV - SPEMRJ: Seminário de Pesquisa em Educação Matemática do Estado do Rio de Janeiro, 2008.
- TRIVILIN, L. R. **Conhecimentos de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental para o ensino dos diferentes significados do sinal de igualdade**. Dissertação. (Mestrado em Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática) - Universidade Federal do ABC (UFABC), 127 f. 2013.



## Uma revisão sobre o Ensino de Cálculo

Mariana da Rosa  
Unioeste-Cascavel  
marianabernartt@hotmail.com

Veruska Oriane Brandalize  
Unioeste-Cascavel  
veruskabrandalize@gmail.com

Andréia Büttner Ciani  
Unioeste-Cascavel  
andbciani@gmail.com

**Resumo:** O artigo apresenta uma revisão de literatura sobre os problemas que envolvem o ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. Destacando os principais dilemas envolvidos no seu ensino, também buscaremos identificar o que as pesquisas sugerem para que o alto índice de reprovação seja evitado.

**Palavras-chave:** Ensino de Cálculo; reprovação em Cálculo; Cálculo Diferencial e Integral.

### 1 Introdução

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral permeia, praticamente, todos os cursos da área de ciências exatas de todas as universidades devido a sua grande aplicabilidade nas ciências. Em particular, nos cursos de formação de professores de matemática, ela se constitui em uma disciplina fundamental. Tanto alunos quanto professores desta passam por inúmeras dificuldades no seu transcorrer. Os altos índices de reprovação em todos os cursos nos quais a disciplina se faz presente indicam que algo deva ser investigado e compreendido, uma vez que este fenômeno não é algo local. Quando o estudante passa pela primeira vez a cursar esta disciplina, ou o professor a lecioná-la, pode pensar que se trate de um fenômeno interno, que o alto índice de reprovação aconteça apenas em sua sala de aula. No entanto, logo percebe, tanto estudante, quanto professor, que se trata de um fenômeno de proporções mundiais e recorrente, já há algum tempo. O fracasso na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral nas universidades que a tem em sua grade já se constitui em consenso nos cursos de exatas. Esta problemática acabou por gerar um campo de pesquisa que se inicia e até o surgimento de um movimento em prol da reforma do ensino de Cálculo, iniciado na década de 80, sendo conhecido como Calculus Reform (ou Cálculo Reformado), sendo dedicados a esta temática do ensino e aprendizagem de Cálculo. (WROBEL; ZEFERINO; CARNEIRO, 2013, p. 2).

Este artigo se propõe a compreender que abordagem as pesquisas nacionais adotam como foco, seus objetivos e suas conclusões. Trata-se de um primeiro estudo para levantamento de referências bibliográficas sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral.

Tendo em vista a realidade de muitos acadêmicos, em relação à dificuldade de aprendizagem dos conceitos relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral (CDI), esta problemática ganha enfoque nas pesquisas de Cury (2000), Gazela (2013), Barbosa (2004) entre outros pesquisadores. Visto que o Cálculo é uma das maiores realizações da humanidade, tendo como percussores principais Newton e Leibniz há aproximadamente 300 anos, sendo de grande aplicabilidade para as mais diversas ciências. Também, o CDI, é uma das primeiras disciplinas matemáticas que faz parte da grade curricular dos cursos da área de ciências exatas. De acordo com Silva (2009) “As dificuldades de alunos quanto à aprendizagem dos conteúdos envolvidos nessa disciplina traduzem-se pelo alto índice de reprovação e desistência do curso inicialmente escolhido pelo jovem universitário”.

Segundo Saback (1980 apud WROBEL, ZEFERINO, CARNEIRO, 2013) “Este índice não é um fato novo, como mostram estudos da década de 80 avaliando essa questão”, devido ao número de reprovações que vem se alavancando, surgem cada vez mais pesquisas, para buscar contornar os problemas que provocam estes índices elevados (chegado a 50% de reprovação). É compreensível, a preocupação com os motivos de tantas reprovações, e de fato, vários trabalhos avaliam causas distintas para o problema. Há estudos que identificam o aluno como foco do problema na sua falta de estímulos, na forma com que estuda, na falta de contextualização da matemática e da sua linguagem complexa, que para muitos é quase impossível de ser decifrada. Sendo de fundamental importância a clareza do vocabulário e regras formais da Matemática, bem como domínio dos conceitos matemáticos indicados no currículo da Educação Básica, para que se possa ter um bom êxito.

Wrobel, Zeferino e Carneiro (2013), fazem um mapa dos últimos dez anos dos artigos publicados no “COBENGE” relacionados ao ensino de CDI, evidenciando que de acordo com as pesquisas, o baixo índice de aprovação, não é apenas um problema das universidades brasileiras, mas, um problema enfrentado pelos discentes das instituições do mundo todo. E devido a esta persistência no insucesso na disciplina de Cálculo, é importante buscar e identificar o(s) fator(es) gerador(es). Objetivando a reversão desta peculiar realidade tão enraizada.

Os procedimentos metodológicos utilizados para este início da pesquisa consistem na busca em periódicos e eventos nacionais da área de Educação Matemática artigos que abordam o ensino de Cálculo Diferencial e Integral I nas últimas décadas.

## 2 O Cálculo enquanto disciplina

Geralmente, o primeiro contato dos estudantes com CDI, não é satisfatório para eles e nem para os seus professores. Pode-se observar em Barbosa (2004), Orfali e Ponte (2015), que o desempenho nessa disciplina é baixo, chegando a ocasionar a desistência do curso de quem a tem em sua grade. No ensino acadêmico o CDI é visto como um facilitador da resolução de problemas complexos, desta forma uma importante ferramenta. Porém, devido a este carácter utilitário, geralmente, é tido como um conjunto de regras e processos que devem ser seguidos à risca. Ganhando assim, um aspecto mecanicista em situações algébricas.

Também, a forma com que o professor ensina o conteúdo tem grande influência na apropriação ou não dos seus conceitos. A metodologia utilizada

[...] pela maioria dos professores desta disciplina prioriza a aula expositiva, é centrada na fala do professor, e os conceitos são apresentados como verdades inquestionáveis, como algo pronto e acabado, sem a preocupação de torná-los significativos. Os alunos, por sua vez, acabam resolvendo os exercícios propostos mecanicamente, sem que se exija dos mesmos criatividade e reflexão frente aos problemas, o que os levam a questionar, muitas vezes, a razão da disciplina dentro de sua grade curricular. Ou seja, os cursos de Cálculo em geral, ainda hoje, priorizam mais as operações e técnicas de Cálculo do que a significação para o aluno. (BARROS; MELONI, 2006, p.1.734).

Desta forma, a insignificância do conhecimento está atrelada à metodologia utilizada pelo professor. Em Lima (2008), vemos que a característica dominante de um dos primeiros cursos brasileiros de CDI, ocorridos nas escolas militares do Rio de Janeiro no ano de 1934, era aulas focadas no ensino do professor considerado como único detentor do conhecimento. Apesar, das décadas que já se passaram desde o primeiro curso de Cálculo, não é visto muitas mudanças no seu ensino, embora estarmos colocando em comparação diferentes épocas e realidades.

Está metodologia “tradicional”, acaba por incentivar a não apropriação dos conceitos referentes ao CDI. Aparentando ser totalmente desconhecido pelos alunos recém-chegados à universidade, como coloca Santos e Matos (2012) [...] “Os assuntos tratados nas aulas de Cálculo parecem desconhecidos, chegando-se a pensar que muitos alunos não tiveram ou não assimilaram o mínimo de conhecimento dos conteúdos necessários.”. Assim, podemos identificar o despreparo dos discentes, tendo a falta de compreensão da matemática básica pelos alunos, como fator relevante no afastamento do aprendizado de conceitos que deveriam ser comumente identificados e aplicados. No entanto, é preciso ir além desta frequente justificativa para o insucesso no CDI.

### 3 Uma diferença nas linguagens

Diversos fatores estão relacionados ao insucesso do aluno na disciplina de Cálculo Diferencial Integral I, como é apontado por Barbosa (2004): as aulas tradicionais; a defasagem dos acadêmicos em conceitos da matemática básica; falta de dedicação aos estudos; trabalho extra curso; o Cálculo ser apresentado como uma disciplina pronta e acabada; um ensino axiomático; sua linguagem e a matemática ser mostrada para os alunos como uma ciência construída linearmente. Quando o discente não consegue objetivar a importância do que está sendo ensinado com sua realidade, pode-se ajudar a incentivar um afastamento ainda maior do que já existe do aprendizado.

[...] “Quando o aluno não identifica a relevância dos objetivos de ensino para sua vida, sua formação, colabora para a construção de uma escola separada da realidade. Nesse caso, trata-se apenas de objetivos burocráticos e que dificilmente possibilitam a aproximação entre os alunos e os conteúdos escolares”. (GARZELLA, 2013).

Deste modo, o acadêmico tende a se apegar à memorização de técnicas, utilizando de teorias e axiomas sem ao menos compreender os conceitos envolvidos. Ocorrendo uma mecanização

do conhecimento, como coloca Guimarães (2002) “o foco do aluno está para desenvolvimentos algébricos e não para o entendimento dos conceitos e aplicações”.

Visto também, a dificuldade de compreender a linguagem matemática, que de fato, não é uma língua natural e nem se constitui em uma expressão natural do mundo em que vivemos, como muitas vezes é apresentada pelos educadores e colegas. Segundo Orfali e Ponte (2015) há uma diferença significativa entre a maneira como a matemática é apresentada nos livros, e por muitos professores, das linguagens e dos códigos de uso cotidiano dos alunos. Quando não ocorre esta “comunicação” há um grave obstáculo na apropriação dos conhecimentos referente ao Cálculo, pois, se os alunos não compreendem sua linguagem, dificilmente abstrairão seu conhecimento. Acabando por reforçar a crença de que os objetos matemáticos que são ensinados e aprendidos, são independentes do professor, do estudante e do livro texto, aparentando ser apenas meras interpretações do conhecimento. Incentivando a significação que a Matemática é um saber pronto e acabado.

O modelo de ensino do CDI baseado em repetições de modelos matemáticos, é condizente com o modelo estruturalista que a matemática apresenta, Ciani (2009, p. 27) escreveu, em sua tese de doutorado, a qual tem um aporte teórico norteador a Educação Matemática Realística, que a abordagem da Matemática Realística se contrapõe ao modelo estruturalista para o ensino da matemática. A autora relata que, para Hans Freudenthal, esse modelo

[...] está enraizado em uma perspectiva bastante comum de ensino, que coloca ênfase, entre outras, no domínio de um sistema de teorias matemáticas bem estruturadas. O sujeito é considerado mais instruído, quanto mais capaz for de repetir, tão mais fiel quanto possível, o “conteúdo” ensinado.

Restando assim ao estudante, apenas a reprodução de definições e teoremas, repetindo resoluções padronizadas que se adequam a determinados enunciados de exercícios. Muitas vezes os conceitos deixam de ser compreendidos, prevalecendo uma ênfase em técnicas e regras. Tudo isso pode acarretar uma desvalorização do aprendizado, pois o aluno pode sentir-se passivo no seu próprio processo de construção do conhecimento, sentindo seu processo de aprendizagem irrelevante diante do conhecimento científico.

## 4 Para onde as pesquisas apontam

Usualmente o ensino de CDI é iniciado pelo mais alto nível de generalidade, mas, nem em sua história, o Cálculo desenvolveu-se de forma linear, como é apresentado enquanto disciplina. Pesquisas como de Barbosa (2002), relatam a necessidade de mostrar os conceitos de forma mais intuitiva e atrativa para o aluno, de uma maneira mais próxima à do seu desenvolvimento histórico, partindo de ideias mais particulares e específicas, menos abstratas, e avançando cada vez mais em níveis de abstração e generalização.

Também, entrevistas como a do Prof. Geraldo Severo de Souza Ávila encontradas na tese de doutorado Reis (2001) há a concordância com Barbosa (2002)

[...] Então depois de toda esta minha experiência com ensino, eu acordei para esta realidade de que o ensino rigorizado desde o início não é a melhor coisa. A gente tem de lembrar que o intelecto não é racional, não é só lógica, mas tem a intuição, a visualização geométrica, que muito ajudam no aprendizado. Então, às vezes o rigor encobre as idéias, ele dificulta a apreensão das idéias, ao invés de ajudar. O rigor é importante numa fase um pouco, de maior amadurecimento do aluno, quando ele tem já um espírito crítico, uma capacidade de questionar. Aí é que é a hora do rigor e da organização lógica da matemática. (REIS, 2001, p. 250).

Seguindo está lógica para onde as pesquisas conduzem um primeiro passo para que a compreensão seja mais efetiva no Cálculo é iniciá-lo a partir de algo imaginável pelos estudantes, para que todos possam trabalhar com as ideias inerentes a este saber, avançando cada vez mais, em níveis de complexibilidade, abstração e generalização. “Pois é de suma importância que os estudantes tenham uma clara compreensão do significado dos conceitos estudados para que assim, seja despertada sua curiosidade para a utilização dos mesmos” (CURY, 2000. p. 2).

Cury e Cassol (2004) destacam a análise do erro do aluno como uma ferramenta importante, não no aspecto de levantar dados, mas, buscando a partir do erro, analisar na cognição do aluno, o que o levou a cometer o equívoco, para que assim, as dificuldades sejam apresentadas, e o professor possa intervir, levando o educando a compreender as razões que o levaram ao erro. Também, sugere mudanças na metodologia de trabalho em sala de aula. De forma com que o aluno seja desafiado, tornando as atividades motivadoras, despertando a curiosidade e interesse no estudo.

Já Guimarães (2002), propõe como estratégia um ensino e aprendizado do Cálculo voltado para o uso da investigação matemática, predominando as ações do aluno na condução da sua aprendizagem, sendo tirado o foco do algebrismo puro, incentivando e possibilitando também analisar as situações propostas, em forma de problemas, do ponto de vista numérico e gráfico em conjunto. O pesquisador ainda destaca a importância da utilização estratégica de softwares computacionais, proporcionando representações múltiplas dos problemas, fazendo com que o aluno tenha ”visões” diferentes da que o algebrismo proporciona. A interface rápida e fácil que muitos softwares disponibilizam, permitem um o caráter investigativo no aprendizado, provocando um processo de reflexão matemática.

O uso dessa tecnologia pode aparentar que os softwares estarão resolvendo os problemas pelos discentes, mas apesar das respostas rápidas que são disponibilizadas, é necessário ter conhecimentos matemáticos para análise das respostas. Assim, é um erro vislumbrar a tecnologia por meio desta perspectiva, pois a mesma auxilia na verificação de hipóteses e também em múltiplos estímulos, auxiliando num aprendizado mais significativo do Cálculo.

## 5 Considerações

Este artigo colocou em reflexão as aulas “tradicionais” com foco na mecanização, que de acordo com as pesquisas analisadas, vem deixando lacunas no ensino e aprendizado, visto que parte dos pesquisadores/professores de matemática associa esses altos índices de reprovação

com a dificuldade e à defasagem oriunda a falta de conteúdos necessários no ensino fundamental e médio para a melhor aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Superior. No entanto, temas como metodologia, diferença entre cursos e até mesmo dificuldades referentes a maturidade necessária para a real compreensão do que é o Cálculo fazem parte da discussão, sendo fatores de extrema relevância no alto índice de reprovação. Também a linguagem que a matemática tem, acaba por geral mais um empecilho, além de ter a matemática básica com uma defasagem grande.

Desta forma, notamos um consenso entre as pesquisas, em relação a tornar os conceitos passíveis da imaginação dos alunos. Sendo importante o uso de tendências como investigação matemática, resolução de problemas e uso de softwares para que o discente possa ter múltiplos estímulos para compreensão do conhecimento. Possibilitando aulas mais críticas, contextualizadas, próximas da realidade dos alunos e de conceitos imagináveis ao mesmo, avançando gradualmente em nível de abstração, de forma com que os alunos possam investigar, tornando-se percussores da construção do seu próprio conhecimento.

## Referências

- BARBOSA, Marcos Antônio. **O Insucesso no Ensino e Aprendizagem na Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral**. 2004. 101 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2004.
- BARROS, Rodolfo Miranda; MELONI, Luís Geraldo Pedroso. O processo de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral por meio de metáforas e recursos multimídia. In: XXXIV Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia: Empreender e preservar, Passo Fundo, **Anais...**, 2006.
- CIANI, Andréia Büttner. **O Realístico em Questões não-rotineiras de matemática**. TESE (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Departamento de Matemática, UEL, Londrina, 2012.
- CURY, Helena Noronha; CASSOL, Mariana. Análise de Erros em Cálculo: uma Pesquisa para Embasar Mudanças. **Acta Scientiae**, Canoas, Rio Grande do Sul, v. 6, n. 1, p. 27-36, jan./jun. 2004.
- CURY, Helena Noronha. Estilos de Aprendizagem de Alunos de Engenharia. In: XXVIII CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 2000, Ouro Preto. **Anais...** Porto Alegre: ABENGE, 2000.
- GARZELLA, Fabiana Aurora Colombo. **A disciplina de cálculo I: análise das relações entre as práticas pedagógicas do professor e seus impactos nos alunos**. 2013. 257 f. Tese (Doutorado) - Curso de Pedagogia, Concentração de Educação, Conhecimento, Linguagem e Arte, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2013. Disponível em: <[https://www.fe.unicamp.br/alle/teses\\_dissert\\_tcc/arquivos/tesefabianacolombo.pdf](https://www.fe.unicamp.br/alle/teses_dissert_tcc/arquivos/tesefabianacolombo.pdf)>. Acesso em: 22 jul. 2017.

- GUIMARÃES, Oswaldo Luiz Cobra. **Cálculo diferencial e integral uma mudança de foco:** do algebrismo às representações múltiplas, através de atividades de modelagem matemática e ambientes informatizados. 2002. 254 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Engenharia da Produção) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. 2002.
- LIMA, Gabriel Loureiro de; O Ensino de Cálculo Diferencial e Integral no Brasil entre 1810 e 1934: os cursos das escolas militares do Rio de Janeiro e da Escola Politécnica de São Paulo. In: XII Encontro Brasileiro de estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática. XII EBRAPEM - Educação Matemática: Possibilidades de interlocução, 2008, Rio Claro. **Anais...** Rio Claro: UNESP, 2008. Disponível em: <[http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/57-1-A-gt10\\_lima\\_ta.pdf](http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/57-1-A-gt10_lima_ta.pdf)>. Acesso em: 22 ago. 2017.
- ORFALI, Fabio; PONTE, Tadeu Aparecido Pereira da. Contextualização e formalismo matemático no ensino de limites e continuidade: um estudo de caso. In: XIV Conferência Interamericana de Educación Matemática, 2015, Chiapas. **Anais...** Chiapas: CIAEM, 2015. p. 1-12. Disponível em: <[http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv\\_ciaem/xiv\\_ciaem/paper/viewFile/597/272](http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/597/272)>. Acesso em: 21 jul. 2017.
- REIS, Frederico da Silva. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de cálculo e análise:** visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. 2001. 302 f. Tese (Doutorado) - Curso de Matemática, Educação Matemática, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.
- SANTOS, Sílvia Pereira dos; MATOS, Márcia Graci de Oliveira. O ensino de cálculo I no curso de licenciatura em matemática: obstáculos na aprendizagem. **Revista Eventos Pedagógicos: REP's, Sinop**, v. 3, n. 3, p. 458-473, 2012.
- SILVA, Benedito Antonio da. Componentes do processo de ensino e aprendizagem do Cálculo: Saber, Aluno e Professor. In: IV SIPEM, 2009, Brasília. **Anais...** Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2009.
- WROBEL Julia Schaetzle; ZEFERINO Marcus Vinicius Casoto. Um mapa do ensino de cálculo nos últimos 10 anos do Cobenge. In: XLI Congresso Brasileiro de Educação em engenharia, 2013, Gramado. **Anais...** Gramado: ABENGE, 2013.
- WROBEL Julia Schaetzle; ZEFERINO Marcus Vinicius Casoto; CARNEIRO Teresa Cristina Janes. Ensino de cálculo diferencial e integral na última década do enem: uma análise usando o alceste. Curitiba. In: XI Encontro Nacional de Educação Matemática, 2013, Curitiba. **Anais...** Disponível em: <[http://sbem.web1471.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/2263\\_683\\_ID.pdf](http://sbem.web1471.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/2263_683_ID.pdf)>. Acesso em: 24 jul. 2017.



## Classificação de máximos e mínimos de funções de várias variáveis via autovalores

Laura Massuda Crema<sup>1</sup>  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Câmpus Cascavel  
laura.crema@unioeste.br

Fabiana Magda Garcia Papani  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Câmpus Cascavel  
fgarciapapani@gmail.com

**Resumo:** A busca por pontos críticos de uma função é de grande interesse para a ciência. Por meio das derivadas da função, podemos localizar esses pontos e classificá-los utilizando diversos métodos. Neste artigo, resultado do trabalho de iniciação científica desenvolvido pela discente a partir de abril do corrente ano, vamos dar ênfase ao método de classificação dos pontos críticos via autovalores e compará-lo com o tradicional método de classificação via menores principais.

**Palavras-chave:** Pontos críticos; Matriz Hessiana.

### 1 Introdução

Obter e classificar os pontos críticos (pontos de máximo, pontos de mínimo ou pontos de sela (inflexão)) de uma função é um problema matemático comum, que possui aplicações práticas em diversos campos da ciência.

No caso univariado, determinar os pontos críticos e classificá-los é um trabalho bastante simples e baseia-se no estudo de derivadas da função no ponto. Contudo, quando trabalhamos com funções de várias variáveis, os métodos de classificação dos pontos críticos, que baseiam-se em derivadas parciais, tornam-se mais sofisticados. Uma maneira de tomar a decisão é obviamente visualizar o gráfico da função, mas isso nem sempre é possível e, ainda que possível é bastante desejável estabelecer um método mais preciso para classificar tais pontos críticos. Existem vários métodos conhecidos para isso, por exemplo, o método de classificação das formas quadráticas via menores principais. Quando se tem um caso de uma função de duas variáveis, tal processo não requer grandes esforços e é o mais abordados nos livros textos e nos cursos de Cálculo Diferencial, porém a medida que o número de variáveis aumenta tal método vai ficando bastante trabalhoso.

Um método preciso e mais prático (também do ponto de vista computacional) é o método de classificação das formas quadráticas via autovalores, o qual baseia-se em princípios de Álgebra Linear, mais especificamente nos sinais dos autovalores da matriz Hessiana. Pretende-se neste trabalho apresentar os conceitos de Álgebra Linear e Cálculo Diferencial, necessários para a

---

<sup>1</sup>Bolsista do programa de Iniciação Científica e Mestrado - PICME-CNPq/CAPES

compreensão do método de classificação via autovalores, bem como realizar exemplos com a plotagem de gráficos objetivando o bom entendimento do mesmo. Pretende-se ainda apresentar um exemplo de uma função de três variáveis e resolvê-lo pelos dois métodos ora mencionados, destacando o quanto o método via menores principais vai se tornando mais complexo do que o método via auto-valores a medida que o número de variáveis aumenta.

## 2 Conceitos, definições e resultados importantes

### 2.1 Pontos críticos

**Definição 1.** Considere uma função  $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $P \in D \subset D_f$ , dizemos que:

- $P$  é um **ponto de máximo local** de  $f$  em  $D$  se existe uma bola aberta  $B_r(P)$  de centro  $P$  e raio  $r$  tal que  $f(x) \leq f(P) \forall x \in B_r(P) \cap D$ ;
- $P$  é um **ponto de mínimo global** de  $f$  em  $D$  se existe uma bola aberta  $B_r(P)$  de centro  $P$  e raio  $r$  tal que  $f(x) \geq f(P) \forall x \in B_r(P) \cap D$ ;
- $P$  é um **ponto de sela** se é um ponto crítico que não é ponto de máximo ou mínimo (é assim chamado pois no gráfico a região próxima ao ponto  $P$  se assemelha a uma sela de cavalo).

**Definição 2.** Seja  $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Para cada variável  $x_i$  e em cada ponto  $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  do domínio de  $f$ , definimos a **derivada parcial** de  $f$  com relação a  $x_i$  no ponto  $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  como número

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_1, \dots, p_n) = \lim_{x_i \rightarrow p_i} \frac{f(p_1, \dots, x_i, \dots, p_n) - f(p_1, \dots, p_i, \dots, p_n)}{x_i - p_i},$$

caso o limite exista.

Na prática, derivamos em relação a uma variável ( $x_i$ ) considerando as demais como constante. Somente a  $i$ -ésima coordenada sofre variação.

**Definição 3.** Dada uma função  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $n$  variáveis, suas derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,  $i = 1 \dots n$  também são funções de  $n$  variáveis. Podemos então derivar parcialmente  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  obtendo as derivadas parciais de segunda ordem da função  $f$ .

**Exemplo 4.** Considere  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = 2x^4y^3 - xy^2 + 3y + 1$ . Temos que as derivadas parciais de  $f$  são dadas por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 8x^3y^3 - y^2; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6x^4y^2 - 2xy + 3.$$

As derivadas parciais de segunda ordem de  $f$  são:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 24x^2y^3; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 24x^3y^2 - 2y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12x^4y - 2x.$$

Note que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$$

O fato acima, não aconteceu por acaso, veja o teorema a seguir,

**Teorema 5. (Teorema de Young)** Seja  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  uma função de classe  $C^2$  em um conjunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . Então, para todo  $x \in U$  e para cada par de índices  $i, j$ , vale

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

**Definição 6.** Chamamos **matriz Hessiana** de  $f$  num ponto  $P$  a matriz simétrica <sup>2</sup> formada pelas derivadas de segunda ordem de  $f$  no ponto  $P$ .

$$D^2 f(P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

No exemplo anterior, a matriz Hessiana de  $f$  é dada por

$$D^2 f(P) = \begin{bmatrix} 24x^2y^3 & 24x^3y^2 - 2y \\ 24x^3y^2 - 2y & 12x^4y - 2x \end{bmatrix}$$

## 2.2 Formas quadráticas

**Definição 7.** Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ , a **forma quadrática** associada à matriz  $A$  é a função escalar

$$Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ h \longrightarrow Q(h) = h^T \cdot A \cdot h$$

que associa cada matriz  $A$  a uma matriz  $1 \times 1$ , entendida como um número real.

**Definição 8.** Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  e  $Q(h) = h^T \cdot A \cdot h$  a forma quadrática associada, dizemos que:

- A matriz  $A$  é positiva definida se  $Q(h) > 0$  para todo  $h \neq 0$  em  $\mathbb{R}^n$
- A matriz  $A$  é positiva semidefinida se  $Q(h) \geq 0$  para todo  $h \neq 0$  em  $\mathbb{R}^n$
- A matriz  $A$  é negativa definida se  $Q(h) < 0$  para todo  $h \neq 0$  em  $\mathbb{R}^n$
- A matriz  $A$  é negativa semidefinida se  $Q(h) \leq 0$  para todo  $h \neq 0$  em  $\mathbb{R}^n$
- A matriz  $A$  é indefinida se existem  $h$  e  $k$  em  $\mathbb{R}^n$  tais que  $Q(h) > 0$  e  $Q(k) < 0$

**Definição 9.** Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ . O **menor principal líder** de ordem  $k$  de uma matriz  $n \times n$  é o determinante de uma submatriz  $k \times k$  de  $A$  obtida removendo-se as últimas  $n - k$  linhas e as últimas  $n - k$  colunas de da matriz  $A$ .

<sup>2</sup>Uma matriz quadrada  $A$  é dita simétrica se  $a_{ij} = a_{ji}$ , isto é, se a parte superior é um reflexo da parte inferior, a partir da diagonal.

O teorema que veremos a seguir tem como objetivo relacionar as matrizes positivas (semi)definidas, negativas (semi)definidas ou indefinidas com os menores principais líderes da matriz.

**Teorema 10.** *Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  simétrica, podemos classificá-la por meio do estudo dos menores principais líderes. Sendo assim,*

- *Se todos os menores principais líderes são maiores que zero então  $A$  é positiva definida;*
- *Se todos os menores principais líderes de ordem ímpar são menores do que zero e todos os menores principais líderes de ordem par são maiores que zero então  $A$  é negativa definida;*
- *Se todos os menores principais líderes são maiores ou iguais a zero então  $A$  é positiva semidefinida;*
- *Se todos os menores principais líderes de ordem ímpar são menores ou iguais a zero e todos os menores principais líderes de ordem par são maiores ou iguais a zero então  $A$  é negativa semidefinida;*
- *Se os menores principais líderes não se enquadram em nenhum dos casos anteriores então  $A$  é indefinida.*

**Definição 11.** Dada uma matriz quadrada  $A$ ,  $n \times n$ . Chamamos um número  $\lambda$  de **autovalor** de  $A$  se existe um vetor  $v$  não nulo tal que  $A \cdot v = \lambda \cdot v$ . Isto é, um autovalor é uma raiz do chamado polinômio característico  $p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I)$ , em que  $I$  a matriz identidade  $n \times n$ .

O teorema que veremos a seguir tem como objetivo relacionar as matrizes positivas (semi)definidas, negativas (semi)definidas ou indefinidas com os autovalores da matriz.

**Teorema 12.** *Seja  $A$  uma matriz simétrica:*

- *Se todos os autovalores de  $A$  são positivos então  $A$  é positiva definida;*
- *Se todos os autovalores de  $A$  são negativos então  $A$  é negativa definida;*
- *Se todos os autovalores de  $A$  são maiores ou iguais a zero então  $A$  é positiva semidefinida;*
- *Se todos os autovalores de  $A$  são menores ou iguais a zero então  $A$  é negativa semidefinida;*
- *Se existe ao menos um autovalor positivo e um autovalor negativo então  $A$  é indefinida.*

### 2.3 Relação entre formas quadrática e pontos críticos

O teorema a seguir relaciona a matriz Hessiana com a classificação de pontos críticos.

**Teorema 13.** *Considere uma função  $f$  e  $P$  um ponto crítico de  $f$ . Se a matriz Hessiana no ponto  $P$  é*

- *positiva definida,  $P$  é um ponto de mínimo local de  $f$ ;*

- *negativa definida*,  $P$  é um ponto de máximo local de  $f$ ;
- *indefinida*,  $P$  é um ponto de sela de  $f$ ;
- *positiva semidefinida ou negativa semidefinida*, não conseguimos definir a situação.

### 3 Aplicações

**Exemplo 14.** Considere a função  $f(x, y) = x^4 + x^2 - 6xy + 3y^2$ . As derivadas parciais são dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 + 2x - 6y; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -6x + 6y$$

Assim, resolvendo o sistema  $S = \begin{cases} 4x^3 + 2x - 6y = 0 \\ -6x + 6y = 0 \end{cases}$  encontramos os candidatos a pontos críticos:  $P_1 = (0, 0)$ ,  $P_2 = (1, 1)$  e  $P_3 = (-1, -1)$ .

A matriz Hessiana neste caso é dada por:

$$D^2 f(P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x^2 + 2 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

Vamos agora classificar cada um dos pontos críticos utilizando primeiramente o método dos menores principais e depois o método dos autovalores.

- Classificação dos pontos críticos via menores principais.

Neste caso temos o menor principal líder de ordem 1, que é dado por  $m_1 = 12x^2 + 2$  e o menor principal líder de ordem 2 que é dado por  $m_2 = \det D^2 f(P) = 6(12x^2 + 2) - 36 = 72x^2 - 24$ . Avaliando tais menores nos pontos críticos temos:

- Considerando  $P_1 = (x, y) = (0, 0)$  temos  $m_1 = 2$  e  $m_2 = -24$  e portanto, pelo Teorema 10, a matriz Hessiana é indefinida e, pelo Teorema 13,  $P_1 = (0, 0)$  é ponto de sela.
- Considerando  $P_2 = (1, 1)$  ou  $P_3 = (-1, -1)$  temos  $m_1 = 14$  e  $m_2 = 48$  e portanto a matriz Hessiana é positiva definida e  $P_2 = (1, 1)$  e  $P_3 = (-1, -1)$  são pontos de mínimo locais.

- Classificação dos pontos críticos via autovalores:

- Considerando  $P_1 = (x, y) = (0, 0)$  temos que  $\lambda_1 = 4 + 2\sqrt{10}$  e  $\lambda_2 = 4 - 2\sqrt{10}$  são autovalores da matriz Hessiana e portanto pelo Teorema 12 a matriz Hessiana é indefinida e, pelo Teorema 13,  $P_1 = (0, 0)$  é ponto de sela.
- Considerando  $P_2 = (1, 1)$  ou  $P_3 = (-1, -1)$  temos que os autovalores da matriz Hessiana são  $\lambda_1 = 10 + 2\sqrt{13}$  e  $\lambda_2 = 10 - 2\sqrt{13}$ , portanto a matriz Hessiana é positiva definida e  $P_2 = (1, 1)$  e  $P_3 = (-1, -1)$  são pontos de mínimo locais.

As Figuras 1 e 2 mostram os gráficos da função definida anteriormente para  $(x, y) \in \mathbb{R}$  e para  $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ , respectivamente. Visualmente podemos observar que  $(1, 1)$  e  $(-1, -1)$  são pontos de máximo locais e que  $(0, 0)$  é um ponto de sela.

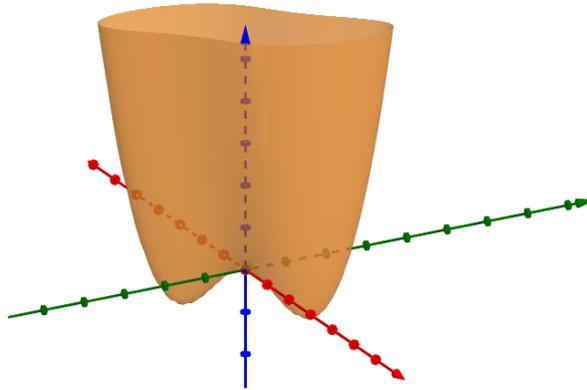


Figura 1: Gráfico de  $f$

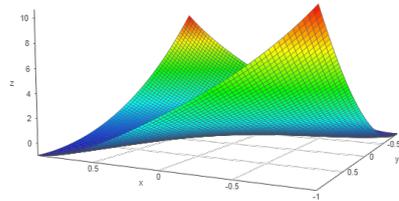


Figura 2: Gráfico de  $f$ ,  $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$

**Exemplo 15.** Seja  $f(x, y, z) = (x^2 + 2y^2 + 3z^2)e^{(x^2+y^2+z^2)}$ .

Neste caso as derivadas parciais são,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{(x^2+y^2+z^2)}(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{(x^2+y^2+z^2)}(2 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2ze^{(x^2+y^2+z^2)}(3 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)$$

Igualando as derivadas parciais a zero, encontramos o único candidato a ponto crítico,  $P = (0, 0, 0)$ . A fim de classificarmos o ponto crítico determinemos a matriz Hessiana.

Assim como no exemplo anterior vamos fazer a classificação do ponto crítico via menores principais e via autovalores.

Calculamos as derivadas de segunda ordem,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = [(2e^{(x^2+y^2+z^2)} + 2xe^{(x^2+y^2+x^2)}2x)(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)] + [2xe^{(x^2+y^2+x^2)}2x];$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = [(2e^{(x^2+y^2+z^2)} + 2ye^{(x^2+y^2+x^2)}2y)(2 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)] + [2ye^{(x^2+y^2+x^2)}4y];$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = [(2e^{(x^2+y^2+z^2)} + 2ze^{(x^2+y^2+x^2)}2z)(3 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)] + [2ze^{(x^2+y^2+x^2)}6z];$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (2x2ye^{(x^2+y^2+x^2)})(3 + x^2 + 2y^2 + 3z^2);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = (2x2ze^{(x^2+y^2+x^2)})(4 + x^2 + 2y^2 + 3z^2);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = (2y2ze^{(x^2+y^2+x^2)})(5 + x^2 + 2y^2 + 3z^2).$$

Assim, temos que a matriz Hessiana no ponto  $P = (0, 0, 0)$  é,

$$D^2 f(P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

- Classificação dos pontos críticos via menores.

Neste caso temos um menor líder de ordem 1,  $m_1$ , um menor líder de ordem 2,  $m_2$  e um menor líder de ordem 3,  $m_3$ :

$$m_1 = 2 > 0; m_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 > 0 \text{ e } m_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 48 > 0 \text{ e portanto a matriz}$$

Hessiana é positiva definida e  $P(0, 0, 0)$  é ponto de mínimo local.

- Classificação dos pontos críticos via autovalores:

Os autovalores da matriz Hessiana são as soluções da equação

$$\det \begin{bmatrix} (2 - \lambda) & 0 & 0 \\ 0 & (4 - \lambda) & 0 \\ 0 & 0 & (6 - \lambda) \end{bmatrix} = 0 \iff (2 - \lambda)(4 - \lambda)(6 - \lambda) = 0$$

Assim, os autovalores são  $\lambda_1 = 2$ ;  $\lambda_2 = 4$ ;  $\lambda_3 = 6$ . Sendo todos os autovalores positivos, pelo Teorema 12, a matriz Hessiana é positiva definida, e pelo Teorema 13,  $P = (0, 0, 0)$  é ponto de mínimo local.

## 4 Considerações finais

Com os dois exemplos apresentados podemos perceber que o processo de classificação vai se tornando trabalhoso a medida que aumentamos o número de variáveis. Uma função de  $n$  variáveis gera uma matriz Hessiana  $n \times n$ , e para classificar os ponto críticos precisamos calcular  $n$  menores principais líderes. Assim, quando o número de variáveis é grande é conveniente classificar os pontos críticos via autovalores, muitas vezes contando com o apoio de softwares computacionais no processo. Cabe ressaltar que as demonstrações dos Teoremas, não apresentadas neste trabalho, podem ser encontradas em BORTOLOSSI(2002).

## Referências

- BORTOLOSSI, Humberto José. Cálculo Diferencial a Várias Variáveis: Uma introdução à Teoria de Otimização. São Paulo: Edições Loyola, 2002.
- BOLDRINI, José Luiz et al. Álgebra Linear. 3. ed., São Paulo: Harbra, 1980.

## Tornando a matemática mais perceptível ao aluno através de um experimento

Ueslei Mallmann<sup>1</sup>

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste  
ueslei\_mallmann@hotmail.com

Ketelly Caroline Felix da Silva<sup>1</sup>

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste  
ketellymat@hotmail.com

**Resumo:** Este trabalho tem por finalidade expor a ideia de uma atividade envolvendo a modelagem matemática. A atividade foi realizada com os alunos do segundo ano do ensino médio da rede pública de ensino de Cascavel, no Colégio Estadual Pacaembu, sob orientação do professor Josemar Santi, supervisor do subprojeto de Matemática vinculado ao Projeto Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (Pibid). O objetivo da atividade era abordar a soma infinita de uma Progressão Geométrica, utilizando a ideia de aprendizagem significativa, por meio de uso de ferramentas do cotidiano, com o intuito de facilitar a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos.

**Palavras-chave:** Experimento; Progressão Geométrica; Infinito.

### 1 Introdução

O conteúdo trabalhado é Progressão Geométrica. Nosso professor supervisor já estava abordando a definição de uma Progressão Geométrica e o cálculo de seu termo geral; logo, procuramos conteúdos futuros para exercer nosso trabalho. Na sequência dos conteúdos, o livro didático apresentava o cálculo da soma finita e infinita de termos de uma Progressão Geométrica. Interessamo-nos pela forma do cálculo da soma dos infinitos termos de razão assumindo valores menores que 1 e maiores que -1 com último termo tendendo a zero, a qual foi abordada de forma abstrata no livro didático. Analisando a turma a ser trabalhada, notamos que havia pouco rendimento perante o método apresentado para trabalhar o conteúdo. Os alunos se dispersavam e não participavam ativamente da construção das relações matemáticas. Buscando melhorias, repensamos a metodologia para tornar o conteúdo perceptível. O objetivo principal em questão é a formação do saber matemático de forma significativa, de modo que, se compreenda os processos envolvidos, estabelecendo relações entre os conceitos estudados em prol da evolução do conhecimento.

[...] A expansão dessa tendência da educação matemática depende da forma como suas pesquisas estejam atentas, tanto à valorização do saber matemático, como a uma proposta educacional significativa para os sujeitos nela envolvidos. (PAIS, 2005, p. 116).

---

<sup>1</sup>Aluno de licenciatura em Matemática e Bolsista de Iniciação à Docência do Subprojeto PIBID de matemática, do campus de Cascavel.

## 2 Metodologia

Visando trabalhar com a modelagem matemática, elaboramos um experimento para contextualizar o conteúdo aos “olhos” do aluno.

[...] Enquanto o matemático [...] busca níveis mais complexos de generalidade, o professor de matemática, ao contrário, deve recontextualizar o conteúdo, tentando relacioná-lo a uma situação que seja mais compreensível para o aluno. (PAIS, 2005, p.32).

O conhecimento através da contextualização proporciona um olhar mais crítico como também um poder mais avançado de reflexões, ampliando a visão sobre determinado tema, que por sua vez, não deixa que o conhecimento se torne mecânico, no qual apenas se repete o que está sendo ensinado.

A noção de contextualização permite ao educador uma postura crítica, Priorizando os valores educativos, sem reduzir seu aspecto científico. [...] O valor educacional de uma disciplina expande na medida em que o aluno compreende os vínculos do conteúdo estudado com um contexto compreensível por ele. (PAIS, 2005, p. 27).

Baseando-nos no pensamento de Jutta, nossa ideia era reconstruir um pensamento fechado de forma que se tornasse um conteúdo acessível, possibilitando maior exploração de conceitos; ou seja, elaboramos uma situação-problema a qual envolvia os conceitos a serem estudados. Ou seja, problematizamos a situação presente de forma que tenha significado os processos realizados pelos alunos.

O ponto de partida da atividade matemática deve ser o problema. Os conceitos, as ideias e os métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, para cuja resolução os alunos desenvolvem algum tipo de estratégia. (JUTTA, 2012, p. 42).

Buscamos valorizar as ideias geradas pelos alunos em relação à atividade envolvida com o objetivo de gerar conexões entre suas percepções e as ferramentas matemáticas presentes no experimento. Dessa forma, os alunos obteriam maior percepção do significado da construção dos conceitos matemáticos e um ambiente o qual a mesma possa ser aplicada, adquirindo uma aprendizagem significativa. Adiante veremos maneiras de como utilizamos essa ideia para construir o conhecimento que estava proposto nos objetivos.

O saber matemático está associado ao problema de validação dos conteúdos aprendidos. Um conhecimento passa a ser considerado como verdadeiro quando é submetido ao controle de um processo de validação, no qual é preciso destacar diferentes níveis, segundo observações de Balacheff (1988) (PAIS, 2005, p. 37).

No momento em que o aluno passa a valorizar o processo que, por conseguinte, gera interesse pela reflexão e interesse pela obtenção do conhecimento, se situa na posição onde o próprio alcança percepções e relações sem orientações diretas do professor. Esse posicionamento só se diz alcançado após o conhecimento sofrer seu devido impacto aos “olhos” do aluno, gerando significado e despertando interesse do mesmo na obtenção de resultados, seja um problema, um

conceito, ou uma abstração mais rigorosa. Dessa forma, devemos valorizar a quem está a procura do conhecimento, nos disponibilizando a estimular seu raciocínio de modo que os próprios criem seu caminho de aprendizado.

### 3 Experimento

O experimento foi realizado no laboratório de biologia do Colégio Estadual Pacaembu. Para realizá-lo, são necessários os seguintes equipamentos:

- Uma jarra de no mínimo 2 Litros;
- Um copo de medida de 500mL;
- Um copo descartável;
- Uma seringa de 10mL;
- Um recipiente com água para manuseio;

No local, existiam torneiras, logo, não foi necessário o recipiente para manuseio, uma vez que, os alunos poderiam retirar a água das torneiras tranquilamente. Nesse dia, estavam presentes vinte e quatro alunos. Dividimos a turma em quatro grupos, de modo que cada grupo obtivesse uma torneira para manusear a água. Cada grupo possuía um conjunto contendo os itens citados acima. Inicialmente entregamos, para cada aluno, uma folha com instruções do procedimento e um quadro para ser preenchido para auxílio do desenvolvimento da atividade, que consistia em adicionar água à uma jarra obedecendo uma lei. O procedimento foi realizado em forma de passos. No primeiro passo, os alunos adicionam 1000mL na jarra vazia. Do segundo passo em diante, os alunos adicionam sempre metade da água do passo anterior. Antes do início do procedimento, fizemos um questionamento: “Será que a água irá transbordar da jarra”.



Figura 1: Realização do experimento

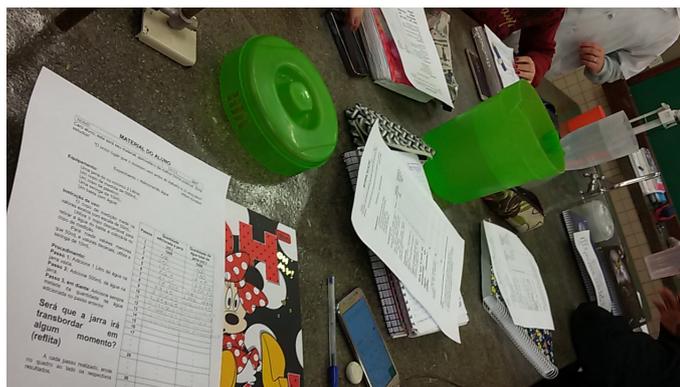


Figura 2: Material do aluno preenchido

Tabela 1: Passos realizados no experimento

Passos	Quantidade adicionada à jarra (mL)	Quantidade de água total da jarra (mL)
1	1000	1000
2	500	1500
3	250	1750
4	125	1875
...	...	...
20	0,0019073486	1999,9980926514
...	...	...
40	0,000000001819894	1999,9999999982

As colunas dois e três do quadro representavam uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{2}$  e a soma finita dos termos, respectivamente. Desse modo, nosso objetivo foi esclarecer a sequência com dados claros para que os alunos fizessem relações com o conteúdo estudado anteriormente. Após preenchimento do quadro, orientamos os alunos para realizar um relato do experimento interligando ideias com conteúdo estudado anteriormente (Termo geral e soma dos finitos termos de uma Progressão Geométrica). Pelo relato dos alunos 1 e 2, pode-se perceber que alguns conseguiram identificar a Progressão Geométrica e sua razão.

“[...] Conforme vamos adicionando os mL forma uma PG Decrescente. Lembrando que temos o primeiro e o segundo termo.”

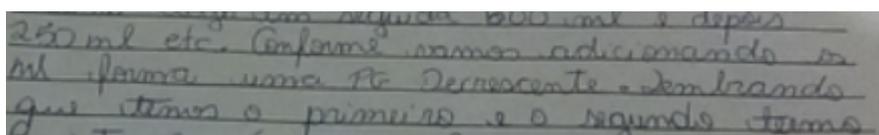


Figura 3: Recorte do trecho escrito do aluno 1

“Na folha se multiplicarmos 100 por  $\frac{1}{2}$  que seria a razão dará o resultado da tabela ao lado e assim constantemente.”

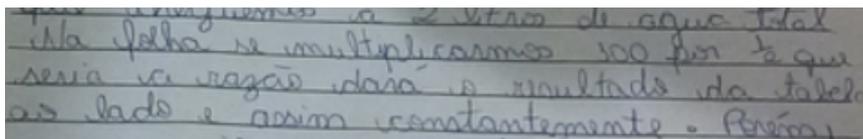


Figura 4: Recorte do trecho escrito do aluno 2

O aluno três percebeu que havia um “teto” onde a jarra não iria transbordar, pois a quantidade adicionada estava se aproximando cada vez mais de zero.

“[...] Ela nunca transbordaria, usando a fórmula da PG, poderíamos chegar ao resultado de uma forma mais fácil.”

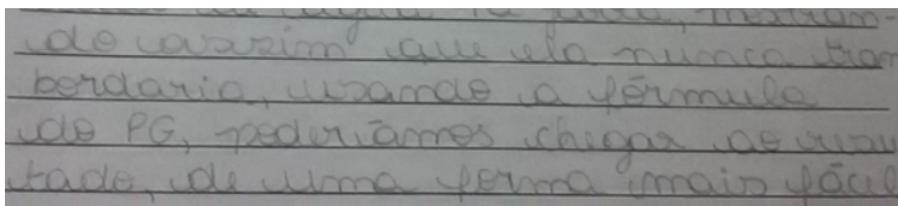


Figura 5: Recorte do trecho escrito do aluno 3

Por esse motivo, o aluno quatro percebeu que se tratava de uma progressão infinita.

“Pude concluir que assim como uma PG infinita, pois não há possibilidades de chegar a 0 que seria o último termo.”

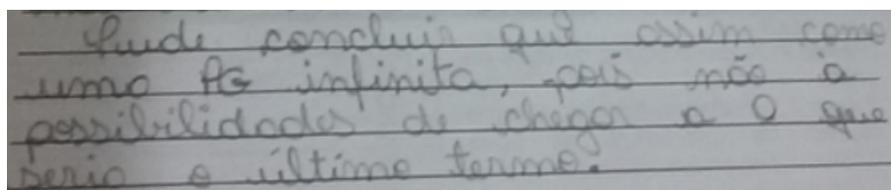


Figura 6: Recorte do trecho escrito do aluno 4

Houve relatos dizendo que por meio da matemática poderíamos obter os valores mais facilmente. Por fim, alguns alunos conseguiram perceber que a matemática não é somente teórica.

“Portanto, a matemática não está somente na teoria, e sim podemos utilizá-la no dia-a-dia, como na forma simples de encher uma jarra de 2L com água.”

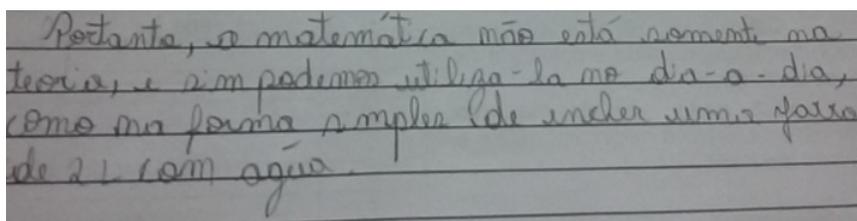


Figura 7: Recorte do trecho escrito do aluno 5

Na aula seguinte, foram feitas as socializações dos experimentos, discutindo as ideias apresentadas pelos grupos. Com esta socialização, formalizamos os conceitos e as características da PG que estava envolvida na situação.

## 4 Generalizações

A partir de relatos dos alunos 1 e 2, definimos a progressão geométrica existente no experimento,  $PG(1000, 500, 250, \dots)$  com razão  $\frac{1}{2}$  e decrescente. Em seguida, expomos à sala a frase citada pelo aluno 3. Os alunos concordaram com seu pensamento, o qual dizia que poderíamos chegar aos resultados de uma forma mais fácil. Porém, quais resultados seriam estes? Tratava-se justamente dos dados preenchidos no quadro. Logo, indagamos os alunos quais eram os conceitos que já havia sido abordado em sala. Com isso, definimos o cálculo para o termo geral desta Progressão Geométrica

$$a_n = 1000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)},$$

Onde  $a_n$  é o termo geral  $n$  é o número de termos.

Após, definimos a soma finita desta Progressão Geométrica. Substituindo os valores dados no experimento.

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow \quad (1)$$

$$S_n = \frac{1000 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} \Rightarrow \quad (2)$$

$$S_n = \frac{1000 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)}{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \quad (3)$$

$$S_n = 1000 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) \cdot (-2) \Rightarrow \quad (4)$$

$$S_n = (-2000) \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) \quad (5)$$

Dessa forma, poderíamos calcular os valores à serem preenchidos nos passos 20 e 40. Porém, tendo em vista a escrita do aluno 4, indagamos os alunos se em algum momento essa sequência vai terminar, revelando que um de seus colegas disse que ela seria infinita. Alguns alunos não concordaram no primeiro momento e procuravam efetuar mais divisões para que o valor chegasse ao total de 2000mL. Para concretizar que a sequência seria infinita, dialogamos que cada vez que se adicionava um valor de água, faltaria exatamente este mesmo valor para preenchê-la. Logo, não seria possível chegar à 2000mL. Portanto, definimos que a Progressão Geométrica seria infinita.

A partir desta ideia, introduzimos a ferramenta necessária para efetuar o cálculo da soma infinita  $\lim_{n \rightarrow \infty}$ . Nesse caso, primeiramente apresentamos a expressão de forma intuitiva por

meio do quadro e depois explicamos que ela faria com que o número de termos fosse tão grande quanto quiséssemos. Explicamos como leríamos a expressão (limite quando  $n$  tende ao infinito). Logo, aplicando essa ideia nas expressões já construídas obteríamos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)} \Rightarrow$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Temos ainda, de (5)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = (-2000) \cdot (-1) = 2000.$$

Deduzimos junto aos alunos o porquê de substituir o valor por zero. Demos o exemplo de uma bala sendo repartida; quanto maior o número da repartição, mais próximo de zero os pedaços de bala seriam. A expressão faz com que o número de repartições seja muito grande, se levarmos nossa divisão ao infinito, o limite será zero, ou seja, nos aproximamos de zero, mas nunca chegamos a zero e nem passamos dele. Com isso, a ferramenta de limite nos permite substituir o valor por zero. Portanto, descobrimos um limitante para a sequência que havia sido apresentada e determinamos o “teto” esperado na realização do experimento. Em seguida, utilizamos a mesma ideia na expressão geral da soma finita. Deduzindo qual expressão resultaria caso  $-1 < q < 1$ , onde  $q$  é a razão, obtendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \right] \Rightarrow$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1 \cdot (0 - 1)}{q - 1} \Rightarrow$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1 \cdot (-1)}{q - 1} \Rightarrow$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{-a_1}{q - 1} \Rightarrow$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Ao final, concluímos a atividade expondo a sala o relato do aluno 5, o qual a maioria concordou com a opinião do colega. Portanto, concluímos que o objetivo de tornar a atividade significativa gerou bons resultados em boa parte dos alunos presentes, sendo que a todo momento houve participação e interação tanto no experimento como na dedução dos conceitos.

## Agradecimento

Trabalho realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), entidade do governo brasileiro voltada para a formação de recursos humanos.

## Referências

- JUSTO, Jutta Cornelia Reuwsaat. **Resolução de problemas matemáticos no ensino fundamental**. Educação matemática em revista - RS, Brasil. 2012.
- PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática; uma análise da influência francesa** - 2ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

## O ensino de matrizes por meio da resolução de problemas e ludicidade

Evandro Sozo de Oliveira  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste  
evandrolatrivan@gmail.com

Dulcyene Maria Ribeiro  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste  
dulcyenemr@yahoo.com.br

Alexandre Carissimi  
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste  
alexandreacarissimi@gmail.com

Elisangela Cristina Ribeiro  
Colégio Estadual XIV de Novembro  
lis\_matematica@hotmail.com

**Resumo:** Neste trabalho constam apontamentos e considerações referentes a algumas atividades realizadas durante o estágio supervisionado desenvolvido por alguns dos autores desse texto em uma turma de 2º ano do Ensino Médio. Resolução de problemas e atividades lúdicas, foram escolhidas para embasar as atividades desenvolvidas para ensinar o conteúdo de matrizes, por isso, a parte a fundamentação teórica desse trabalho aborda esses temas. Consideramos, que matrizes é um tópico do currículo do qual não vemos muitas aplicações, por isso a tentativa de abordá-lo utilizando resolução de problemas e atividades lúdicas na sala de aula. Divulgar o trabalho realizado tem a intenção de servir de incentivo a trabalhos futuros.

**Palavras-chave:** Resolução de problemas; atividades lúdicas; Matrizes.

### 1 Introdução

Neste trabalho apresentamos algumas atividades que foram realizadas numa turma de segundo ano do Ensino Médio de um colégio público da cidade de Cascavel-PR. Trata-se de algumas atividades desenvolvidas durante o estágio supervisionado de dois dos autores desse texto, que aconteceu durante o primeiro semestre do ano letivo de 2017, referente à disciplina de Metodologia e Prática de Ensino: Estágio Supervisionado II. Além das atividades de observação e de projeto realizadas na escola, os estagiários foram responsáveis por ministrar 18 horas-aulas, na turma de segundo ano.

O conteúdo trabalhado na regência foi matrizes, mais especificamente, classificação de matrizes, soma, subtração e multiplicação de matrizes, matriz oposta e transposta, igualdade entre matrizes e determinantes pelo método de Sarrus e de Laplace. Seguimos estes conteúdos utilizando o livro “Novo olhar Matemática”, de Joamir Souza, que é a coleção de livros utilizada na escola para a disciplina de matemática nesse ano.

Para começarmos o nosso estágio, pensamos em fazer algumas atividades interessantes e que oportunizassem uma apropriação mais significativa dos conteúdos. Sabíamos que não seria uma tarefa fácil apresentar matrizes e determinantes de maneira diferente, visto que são conteúdos que, de modo geral, são ensinados de maneira tradicional e têm aplicações dentro da própria matemática. Entretanto começamos a pensar como ensinar de uma maneira diferente e decidimos utilizar em parte das aulas a metodologia de Resolução de Problemas.

Manter o interesse dos alunos pela aula é um dos maiores desafios para um professor de matemática. Pensando em resolver este desafio, preparamos uma atividade que envolvia aspectos lúdicos e que pudesse servir de estopim para apresentarmos os conceitos iniciais sobre matriz por meio de atividades que pudessem despertar o interesse dos alunos.

Para a atividade, nos baseamos em um exemplo de aplicação contido no livro didático usado pelos alunos, no qual, as imagens digitais eram abordadas como matrizes, nas quais a ordem representava a resolução da imagem e cada elemento da matriz sendo um pixel, um ponto luminoso colorido. Nesta ideia, encontramos uma imagem quadriculada na internet, criamos uma legenda relacionando cada cor com um número e construímos uma matriz para representar tal imagem. Com esta matriz e a sua legenda em mãos, os alunos deveriam pintar cada elemento com a cor correspondente para encontrar a imagem desejada, além de dar instruções de como localizar um elemento específico desta matriz. A imagem que escolhemos foi uma do personagem da franquia “Super Mario”, pois consideramos que a maioria dos alunos conhece esse personagem, portanto poderia ser algo mais atrativo.

Além de introduzir os conceitos relacionados ao estudo das matrizes, conseguimos envolver e estimular os alunos na resolução das tarefas, obtendo a atenção deles, o que para nós foi essencial para o prosseguimento das demais atividades.

## 2 Resolução de Problemas - a metodologia adotada

Nem todas as atividades que planejamos para ensinar matrizes foram atividades lúdicas. Mas sempre que possível, buscamos fazer uso também da resolução de problemas, por exemplo, ao tratarmos de multiplicação de matrizes e multiplicação por escalar.

Devemos propor aos estudantes várias estratégias de resolução de problemas, mostrando-lhes que não existe uma única estratégia, ideal e infalível. Cada problema exige uma determinada estratégia. A resolução de problemas não se deve constituir em experiências repetitivas, através da aplicação dos mesmos problemas (com outros números) resolvidos pelas mesmas estratégias. O interessante é resolver diferentes problemas com uma mesma estratégia e aplicar diferentes estratégias para resolver um mesmo problema. Isso facilitará a ação futura dos alunos diante de um problema novo. (DANTE, 1991, p.52)

Um dos fatores que nos levou a trabalhar com resolução de problemas foi não querermos simplesmente escrever definições no quadro e fazer com que os alunos simplesmente repetissem procedimentos e não aprendessem de maneira mais significativa.

Para Meneghetti (2011) a resolução de problemas como metodologia surge para alterar

a postura do ensino tradicional, na qual os problemas são simplesmente propostos e resolvidos e sugere-se que questionem as respostas obtidas e os próprios problemas propostos, enfatizando o processo de descoberta e não simplesmente a resposta ou o produto final.

Quando trabalhamos com resolução de problemas, estamos possibilitando que os alunos construam seu próprio conhecimento, façam suas próprias conjecturas e não sejam meramente repetidores. Baseando-se neste fato, Dante (1991, p.25) afirma que é possível por meio da resolução de problemas desenvolver no aluno iniciativa, espírito explorador, criatividade, independência e a habilidade de elaborar um raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis para que ele possa propor boas soluções às questões que surgem no seu dia-a-dia, na escola ou fora dela.

O uso de resolução de problemas é algo que sempre está em discussão pelo fato de ser muito útil no aprendizado dos alunos, tanto que no PCN de matemática do Ensino Fundamental seu valor é ressaltado:

A resolução de problemas, [...] possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança (BRASIL, 1998, p.40).

No contexto da resolução de problemas, um problema pode ser entendido como qualquer tarefa ou atividade para o qual os estudantes não possuem métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta.

Baseando-se nessas ideias, usamos uma atividade na qual era necessário calcular o custo de produção de determinados produtos de uma confeitaria, para isto as informações necessárias eram dispostas em duas tabelas: uma com a informação dos valores de cada ingrediente e a outra com a informação da quantidade necessária de cada ingrediente na fabricação de cada produto. Para encontrar os valores procurados, era necessário realizar uma multiplicação de matrizes, mas mesmo sem conhecer esta operação, os alunos eram capazes de chegar a uma solução trabalhando de forma intuitiva.

Para Dante (1991) é muito comum os alunos saberem efetuar os algoritmos e não conseguirem resolver um problema que envolva um ou mais desses algoritmos, devido à maneira como os problemas matemáticos são trabalhados na sala de aula e apresentados nos livros didáticos, muitas vezes apenas como exercícios de fixação dos conteúdos trabalhados. No caso descrito, os alunos chegavam aos resultados sem precisar de algoritmos.

Um problema pode envolver muito mais do que somente a aplicação de algoritmos e repetição de procedimentos, ele deve sim possibilitar aos alunos que pensem, conjecturem e planejem suas próprias alternativas de resolução, não focando simplesmente na resolução final.

No sentido motivacional, nossa proposta foi a de proporcionar aos alunos o gosto por estudar Matemática, fazendo com que as atividades diferenciadas fossem também um caminho entre o saber matemático e o aluno, considerando nível de escolaridade dos alunos do Ensino Médio.

### 3 As aulas

Na tentativa de fazer algo que chamasse a atenção dos alunos desde a primeira aula, preparamos atividades que os levassem a reconhecer situações que envolviam matrizes e a sua importância em áreas tecnológicas, sem deixar de ensinar definição, notação e termos de uma matriz.

Iniciamos a aula abordando um assunto que, acreditávamos ser do conhecimento geral dos alunos: resolução de imagens. Primeiramente perguntamos aos alunos se eles entendiam o significado dos valores  $144p$ ,  $240p$ ,  $360p$ ,  $480p$ ,  $720pHD$ ,  $1080pHD$ . Vários deles deram respostas afirmativas, dizendo que tinham visto vídeos com essas informações. Completamos dizendo que representam algumas das principais resoluções de telas, assim como resoluções de vídeos em plataformas como o YouTube.

Neste momento, para que os alunos entendessem o significado do que foi falado os questionamos sobre pixels, e alguns responderam que eram partes da imagem. Explicamos então, que é a menor parte de uma imagem digital com informações que determinam a sua cor, sendo que a partir de três cores básicas (vermelho, verde e azul) é possível gerar mais de 16 milhões de possibilidades de cores. Por serem pequenos pontos de luz, próximos uns aos outros, acabam sendo praticamente imperceptíveis a olho nu. Desta maneira, quanto maior a quantidade de pixels melhor é a qualidade de uma imagem.

Assim, voltamos ao questionamento anterior, explicando que aqueles valores apresentados eram parte de expressões do tipo:  $144 \times 256$ ,  $240 \times 427$ ,  $360 \times 640$ ,  $480 \times 853$ ,  $720 \times 1280$  e  $1080 \times 1920$ , que representam a quantidade de *pixels* de uma imagem. Explicamos com um exemplo, que o termo  $720p$  significa que a imagem é formada por 720 linhas e 1280 colunas de *pixels*, totalizando 921600 *pixels*.

Para exemplificar a diferença que isto causa na percepção, trouxemos no material impresso para os alunos uma imagem comparativa, porém com valores adaptados:



Figura 1: Comparativo de resoluções

Fonte: Os autores

Explicamos que cada *pixel* carrega as informações da cor que representa e que arranjos como estes são representados matematicamente como matrizes, conceito que definimos no final da aula.

Na sequência, iniciamos a segunda parte da atividade, na qual constava a seguinte tabela, em que cada elemento do quadro é comparado com um elemento de uma matriz de mesma ordem.

Quadro 1: Quadro para colorir

0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	4	4	4	2	2	5	2	0	0	0	0
0	0	0	4	2	4	2	2	2	5	2	2	2	0	0
0	0	0	4	2	4	4	2	2	2	5	2	2	2	0
0	0	0	0	4	2	2	2	2	5	5	5	5	0	0
0	0	0	0	0	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	3	1	1	3	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	3	1	1	3	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	3	3	3	3	1	1	1	1	0
0	0	2	2	1	3	6	3	3	6	3	1	2	2	0
0	0	2	2	2	3	3	3	3	3	3	2	2	2	0
0	0	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	0
0	0	0	0	3	3	3	0	0	3	3	3	0	0	0
0	0	0	4	4	4	0	0	0	0	4	4	4	0	0
0	0	4	4	4	4	0	0	0	0	4	4	4	4	0

Fonte: Os autores

Definimos que cada número no quadro representava uma cor de acordo com a legenda seguinte e utilizando lápis de cor, os alunos foram orientados a pintar cada elemento com a cor representada pelo número dentro da célula (0 - branco;1 - vermelho;2 - rosaclaro;3 - azul;4 - marrom;5 - preto;6 - amarelo). A imagem obtida foi:

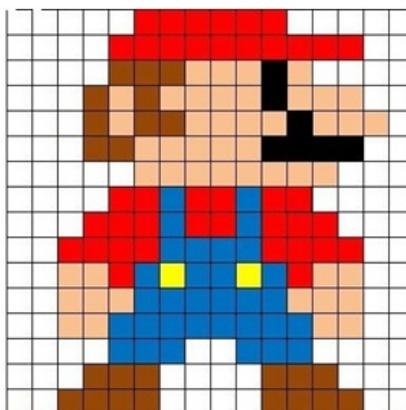


Figura 2: Super Mario

Fonte: <https://i.pinimg.com/originals/f7/4f/66/f74f6605a51b2e37fbb0beffd1f691f5.png>

Depois de pintar as células, os alunos deveriam responder às questões:

- Localize uma célula pintada de cada cor (branco, vermelho, rosa claro, marrom, preto e amarelo) e escreva instruções para encontrá-la.
- Existe alguma maneira padronizada para dar tais instruções? Em caso afirmativo diga qual, em caso negativo diga no que este padrão poderia contribuir.

Quanto à primeira questão, alguns alunos não conseguiram responder, pois não conseguiram formular uma maneira de dar a localização das células, já outros, tiveram algumas ideias para tal tarefa. Dentre os comentários que pudemos observar destacaram-se: enumerar as linhas e as colunas, ou então, enumerar as linhas e relacionar letras para as colunas, ou vice-versa, ou simplesmente enunciar o ordinal correspondente da linha e da coluna da célula escolhida.

A questão que tratava sobre a utilidade de haver uma maneira padronizada de referenciar tais elementos, tinha a intenção de que os alunos entendessem a importância de tal padronização. Alguns responderam que serviria para que todos usassem a mesma linguagem.

Ao final da aula, apresentamos a definição de matriz, juntamente com a notação e representação dos seus elementos, relacionando com a atividade realizada, ou seja, primeiramente, escolhemos uma célula do desenho e pedimos aos alunos que nos dissessem qual era o elemento associado a ela, isto é, a linha e a coluna, nesta ordem, às quais a célula pertencia. Inversamente, apresentamos um elemento da matriz associada e pedimos aos alunos que dissessem a cor presente nesta célula.

De modo geral, a maioria dos alunos teve um pouco de dificuldade para entender a maneira como se localiza um elemento de uma matriz, no entanto, após as devidas explicações, eles conseguiram compreender e perceber a importância da notação utilizada. Depois apresentamos a definição de matrizes, presente no livro didático utilizado pelos alunos e a representação genérica de uma matriz  $A$  de ordem  $m \times n$ . Nas duas aulas seguintes, foram resolvidos exercícios que tratavam de tipos de matrizes e de operações de adição e subtração.

Para abordar multiplicação de matrizes e multiplicação de matriz por um escalar preparamos uma atividade que envolvia resolução de problemas. Tratava-se de um problema referente a um estabelecimento comercial, custo de produção e lucros, que era o seguinte: Um novo centro comercial está sendo construído na cidade de Cascavel, no estado do Paraná com alguns pontos de venda na praça de alimentação ainda vagos. Seu Jerônimo, que se aposentou recentemente, tem interesse em investir em uma confeitaria. Para isto, decidiu pesquisar, com seu amigo Emanuel, a respeito dos rendimentos deste ramo comercial. Emanuel, para demonstrar como administra as vendas de seu negócio, mostrou-lhe as tabelas a seguir:

Quadro 2: Quantidade de ingredientes

		Ingredientes				
		Ovos	Farinha	Leite	Chocolate	Açúcar
Produtos	Torta	0	2	3	5	3
	Bolo	4	3	2	4	2
	Brigadeiro	0	0	3	5	4
	Rocamboles	3	3	5	4	2

Quadro 3: Preço dos ingredientes

<b>Ingredientes</b>	<b>Preço</b>
Ovo	0,20
Farinha	0,35
Leite	0,25
Chocolate	1
Açúcar	0,35

Baseando-se nas tabelas, era preciso responder: 1) O que é possível perceber sobre a quantidade de linhas e de colunas de cada quadro? 2) É possível representar matematicamente estas informações por meio de algum conteúdo estudado? Se a resposta for afirmativa, faça esta representação. 3) Como podemos calcular o preço de produção de cada produto da confeitaria? Represente estas informações da mesma maneira como no item anterior. 4) Para cobrir os demais custos do estabelecimento, seu Jerônimo deve vender seus produtos com um valor 10% maior do que o custo de produção. Calcule qual deve ser este preço de venda para cada produto e represente estas informações da mesma maneira como nos itens anteriores. 5) Pensando em obter algum lucro com a venda de seus produtos, Seu Jerônimo decidiu vendê-los 25% mais caros do que o valor necessário para cobrir os seus custos. Calcule qual deve ser este preço de venda para cada produto e represente estas informações da mesma maneira como nos itens anteriores. Qual é o ganho líquido de cada produto?

Nesta atividade, os alunos deveriam representar matricialmente as informações contidas nas tabelas, além de calcular o custo de produção de cada um dos produtos e representar matricialmente também. Por trás destes cálculos, estava implícita a operação de multiplicação de matrizes. Após encontrar o custo de produção, os alunos deveriam calcular o valor de venda destes produtos, primeiramente, com um acréscimo de 10% sobre o preço de custo, valor necessário para cobrir as demais despesas do estabelecimento e, em seguida, um novo acréscimo de 25%, visando a obtenção de lucro por parte do dono do negócio. Nestes cálculos, estava implícita a operação de multiplicação de uma matriz por um escalar. Por fim, os alunos deveriam calcular o lucro obtido com cada produto, realizando uma operação de subtração de matrizes.

Foram utilizadas para essa atividade duas horas-aula. Tínhamos levado as atividades impressas, com o objetivo de no final da aula recolher as folhas para verificar como os alunos tinham se apropriado do conteúdo, as principais dúvidas e erros cometidos, para que no seguinte pudessemos ajudá-los de maneira mais objetiva.

Percebemos durante a verificação destas atividades e mesmo durante as aulas destinadas à resolução dos problemas que nem todos os alunos conseguiram utilizar corretamente as informações das tabelas para calcular o que era pedido, principalmente no caso de cálculo do custo de produção. Alguns alunos acabaram calculando não o gasto necessário para produzir uma unidade de cada produto, mas o valor gasto com cada ingrediente para a produção de uma unidade de cada produto, como na imagem seguinte, em que em rosa é possível ver os acréscimos realizados pela aluna, quando percebeu que o que tinha feito até então não era a resposta adequada.

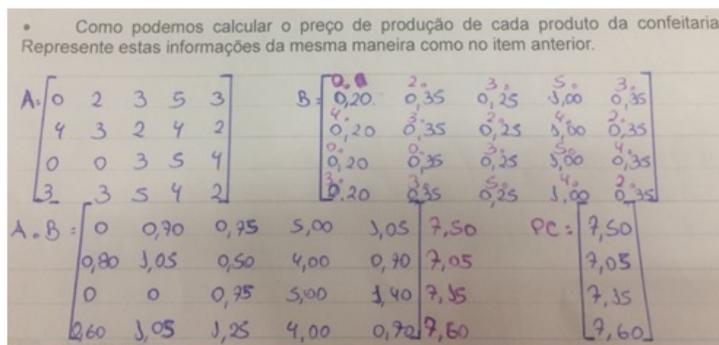


Figura 3: Exemplo de resolução feito por um aluno

Fonte: Os autores

Vários outros realizaram os cálculos corretamente, mas ao seu modo, como ilustrado nas imagens seguintes.

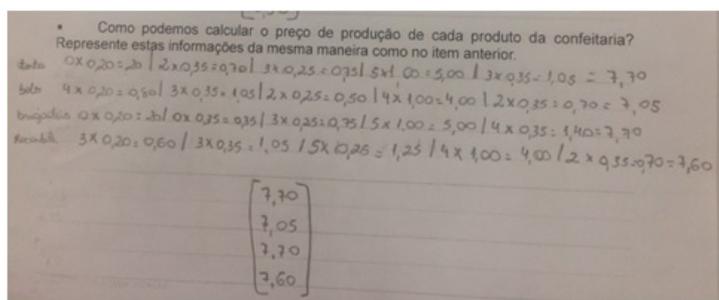


Figura 4: Outra maneira de solução utilizado

Fonte: Os autores

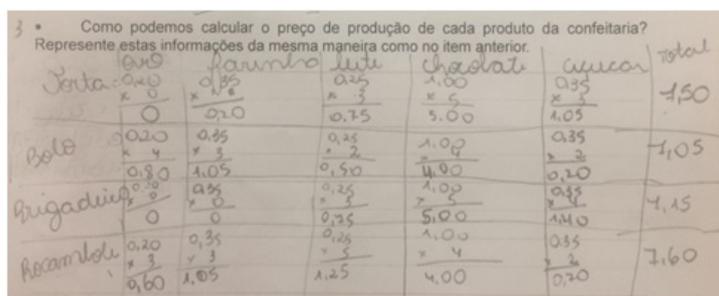


Figura 5: Modo diferente de resolução do exercício

Fonte: Os autores

Até esse momento da aula, os alunos mesmo sabendo que o conteúdo envolvido era matrizes, não tinham visto nenhum modelo de como organizar os dados para fazer a multiplicação de matrizes. Então como representado nas imagens, cada um deles organizou do modo que considerou mais conveniente. A formalização desse conceito, bem como da multiplicação por escalar foram realizadas na aula posterior, utilizando como exemplos as próprias questões da atividade.

## 4 Considerações finais

Pudemos notar que quando trabalhamos com a resolução de problemas, e até mesmo com as atividades lúdicas, como nossa primeira atividade, os alunos conseguem sistematizar de maneira mais eficiente os conteúdos que lhes são passados. Isso nos leva a pensar que vale a pena dedicarmos um pouco mais de tempo das nossas aulas, para que possamos fazê-las com mais significado, para que não sejam apenas a mostraçãõ de fórmulas e definições, mas para que os alunos possam por si próprios, com situações cotidianas e mais próximas da realidade, resolver matematicamente a situação.

A resolução de problemas permite que os alunos estejam livres para pensar em como resolver as tarefas, e não simplesmente em resolver de uma maneira que lhes foi passada como modelo. Percebemos que quando não se trabalha com um modelo rígido, geram-se uma variedade de resposta e de formas de organização dessas respostas que surpreende o professor. Foi o que aconteceu conosco e está representado nas imagens colocadas no texto.

Após todos estes estudos percebemos que os alunos que conheciam pouco, ou praticamente nada a respeito de matrizes, conseguiam já resolver as operações e entender bem do que se tratava. Nas palavras da professora regente da turma, na qual o estágio aconteceu, seus alunos agiram naturalmente,

[...] não se sentindo em momento algum, inibidos pela presença de outros professores em sala de aula, mostrando interesse e um bom desempenho em relação às atividades que lhes foram propostas, tornando as aulas um momento de aprendizagem e oportunidade de compreensão do significado do conteúdo ensinado. “Pude perceber que ao final do período do estágio ocorreu a compreensão do conteúdo abordado sendo possível, tranquilamente, dar continuidade ao assunto nas aulas seguintes. A experiência mostra o quanto é importante diversificar as maneiras de trabalhar os conteúdos em sala de aula, e como os alunos tem interesse por aprender, se forem incentivados a fazê-lo.” (Professora regente)

Por depoimentos como esse e também por perceber o quanto é importante para os alunos que estão em formação, preparando suas primeiras aulas, testarem metodologias e abordagens diferenciadas, que mesmo com dificuldades, entendemos ser necessária a utilização da Resolução de Problemas, bem como de outras metodologias para se ensinar matemática.

## Referências bibliográficas

- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais(PCN)**. Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- DANTE, L.R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 2ed. São Paulo: Ática, 1991.
- MENEGHETTI, F. K. O que é um ensaio teórico? **Revista de Administração Contemporânea**, v. 15, n. 2, p. 320-332, 2011.
- SOUZA, J. R. de. **Novo olhar matemática**: 2. 2. ed. - São Paulo: FTD, 2013.



## Convergência da função $E_\alpha(x)$

Cléia Fabiane Winck<sup>1</sup>

Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
cleiafabiane@hotmail.com

Sandro Marcos Guzzo

Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
smguzzo@gmail.com

**Resumo:** O cálculo fracionário é um campo da matemática que estuda a extensão do conceito de derivada e de integral para uma ordem fracionária. Nas últimas décadas diversos autores mostraram que a modelagem feita a partir do cálculo fracionário oferece uma descrição mais fina de fenômenos naturais que aquela feita a partir do cálculo usual. Para o estudo das soluções de EDOs de ordem fracionária, torna-se necessário o estudo de Transformada de Laplace e das funções de Mittag Leffler, que aparecem naturalmente como solução de várias EDOS. As funções de Mittag Leffler a um parâmetro são também chamadas de exponencial generalizada, pois  $E_1(z) = e^z$ . O estudo dessas funções envolve outros temas importantes, como função gama, convergência de integrais impróprias, convergência de séries de potência e representação de funções por série de potência. O objetivo deste trabalho é mostrar que a função  $E_\alpha(x)$  converge para  $\frac{1}{\alpha}e^{x^{1/\alpha}}$  conforme  $x$  aumenta, senão para qualquer  $\alpha$ , pelos menos para alguns valores específicos de  $\alpha$ , mais precisamente, para  $\alpha = \frac{1}{k}$  com  $k \in \mathbb{N}$ .

**Palavras-chave:** Séries de potência; Funções de Mittag-Leffler.

## 1 Séries infinitas

Nesta seção definiremos série infinita de números reais, e apresentaremos alguns resultados importantes, tais como os testes de convergência de séries.

**Definição 1.** seja  $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$  uma série infinita e  $S_n$  sua sequência de somas parciais. Então, se  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  existir, e for igual a  $S$ , dizemos que a série dada será convergente, sendo  $S$  a soma da série infinita dada. Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  não existir, a série será divergente e não terá uma soma.

Para determinar se uma série é convergente ou divergente, dispomos de alguns métodos.

**Teorema 2.** Se a série infinita  $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$  for convergente, então  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$ .

Esse teorema é bastante útil para mostrar que uma série diverge, pois se  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n \neq 0$  podemos concluir que  $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$  é divergente.

<sup>1</sup>Bolsista do programa de Iniciação Científica e Mestrado - PICME-CNPq/CAPES

**Definição 3.** Dizemos que a série infinita  $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$  será absolutamente convergente se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} |U_n|$  for convergente.

Ainda, podemos afirmar que se uma série for absolutamente convergente, ela deverá ser convergente, de acordo com o próximo teorema.

**Teorema 4.** Se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$  for absolutamente convergente, ela será convergente e  $\left| \sum_{n=1}^{\infty} U_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |U_n|$ . Assim, podemos utilizar dos testes da razão e da raiz para determinar se uma série é absolutamente convergente.

**Teorema 5** (Teste da Razão). Considere a série  $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ , com  $U_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ .

1. Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = L < 1$ , então  $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$  é absolutamente convergente.
2. Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = L > 1$ , então  $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$  diverge.
3. Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = 1$ , o teste é inconclusivo.

**Teorema 6** (Teste da Raiz). Seja  $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$  uma série,  $U_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

1. Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|U_n|} = L < 1$ , então  $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$  é absolutamente convergente.
2. Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|U_n|} = L > 1$ , então  $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$  diverge.
3. Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|U_n|} = 1$ , o teste é inconclusivo.

**Teorema 7** (Teste da Comparação). Sejam as séries  $\sum a_n, \sum b_n$  e  $\sum c_n$ , de termos positivos, então

1. Se  $\sum b_n$  for convergente, e  $\sum a_n \leq \sum b_n$  para todo  $n$  inteiro positivo, então  $\sum a_n$  será convergente.
2. Se  $\sum c_n$  for divergente, e se  $\sum a_n \geq \sum c_n$  para todo  $n$  inteiro positivo, então  $\sum a_n$  será divergente.

### Séries de Potências:

As séries vistas até então envolvem apenas termos constantes. Vamos analisar agora um tipo de série de termos variáveis chamado de séries de potências.

**Definição 8.** A série  $\sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-a)^n$ , com  $x \in \mathbb{R}$  variável,  $a \in \mathbb{R}$  fixo e  $d_n$  uma sequência, é denominada série de potência.

Para  $a = 0$ , a série de potência fica  $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ .

Ao tratar desse tipo de séries, estamos interessados em saber quando essas séries convergem ou divergem. Para isso podemos utilizar algum dos testes mencionados.

**Exemplo:**  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^n} x^n$  é uma série de potências.

Aplicando o teste da raiz, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n 2^n}{3^n} x^n \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} |x|.$$

Pelo teste da raiz, a série de potências será absolutamente convergente qualquer que seja  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $\frac{2}{3}|x| < 1$ . Ou seja, para todo  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $|x| < \frac{3}{2}$ .

Sobre a convergência de uma série de potências, temos três possibilidades, enunciadas no teorema seguinte.

**Teorema 9.** *Seja  $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$  uma dada série de potência. Então uma, e somente uma das seguintes afirmações é verdadeira:*

1. *A série converge para  $x = 0$ ;*
2. *A série é absolutamente convergente para todos os valores de  $x$ ;*
3. *Existe um número  $R > 0$  tal que a série é absolutamente convergente para todos os valores de  $x$  para os quais  $|x| < R$  e é divergente para todos os valores de  $x$  para os quais  $|x| > R$ .*

Ao conjunto de todos os valores de  $x$  para os quais uma determinada série de potências é convergente, chamamos **intervalo de convergência** da série de potências. O número  $R$  do item (iii) do teorema anterior é denominado **raio de convergência** da série de potências. Se o item (i) for verdadeiro,  $R = 0$ ; se o item (ii) for verdadeiro, então  $R = \infty$ .

Uma dada série de potências define uma função que tem como domínio o intervalo de convergência.

## 2 Equações Diferenciais

Nesta seção, apresentaremos algumas ideias elementares acerca das equações diferenciais, evidenciando alguns resultados de nosso interesse.

**Definição 10.** Uma equação que envolve uma ou mais variáveis (independentes) e as derivadas de uma ou mais funções destas variáveis, é dita uma equação diferencial.

**Definição 11.** Uma equação diferencial ordinária envolve derivadas de uma função de uma só variável independente. A ordem de uma equação diferencial é a maior ordem dentre as derivadas da equação.

**Teorema 12.** *Sejam  $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_0(x)$  e  $g(x)$ , contínuas em um intervalo  $I$ , com  $a_n(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ , então existe uma única solução  $y(x)$  no intervalo  $I$  para o PVI (problema de*

valor inicial).

$$\begin{cases} a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

### 3 Função Gama

A função gama pode ser vista como uma extensão para os números reais para a função fatorial, uma vez que a função fatorial está definida apenas no conjunto dos naturais.

**Definição 13.** A função gama associa a cada número real positivo o número representado por  $\Gamma(x)$  determinado pela integral imprópria

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

**Proposição 14.** Para qualquer que seja  $x \in \mathbb{R}$ , com  $x > 0$ , a integral imprópria

$$\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

converge.

É importante observar que a função gama é crescente para  $x \geq 2$ , e estritamente decrescente para  $0 < x \leq 1$ .

**Proposição 15.** Se  $x > 0$ , então  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .

Baseado nessa proposição, podemos enunciar o seguinte corolário, que mostra a relação da função gama com a função fatorial.

**Corolário 16.** Se  $n \in \mathbb{N}$ , então  $\Gamma(n) = (n-1)!$ .

### 4 Funções de Mittag-Leffler

Nesta seção introduziremos a função de Mittag-Leffler a um parâmetro, e alguns resultados envolvendo a mesma.

**Definição 17.** A função de Mittag-Leffler para um parâmetro real  $\alpha > 0$  é a função que a cada  $x \in \mathbb{R}$  associa o número real  $E_\alpha(x)$  dado por

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

Note que para  $\alpha = 1$ , temos que

$$E_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x,$$

o que nos permite interpretar a função de Mittag-Leffler a um parâmetro como uma generalização da função exponencial.

Antes de estudar as propriedades dessa função, é importante verificar a convergência da série que a define.

**Proposição 18.** Para quaisquer  $x, \alpha \in \mathbb{R}$ , com  $\alpha > 0$ , a série

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

é convergente.

*Prova.* Considere  $\alpha \geq 1$ . Nesse caso, para  $k \geq 1$  temos que  $\alpha k + 1 \geq k + 1 \geq 2$ . Como a função gama é crescente para  $x \geq 2$ , então temos que  $\Gamma(\alpha k + 1) \geq \Gamma(k + 1) = k!$ , donde

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} \leq \frac{1}{k!}$$

e portanto

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x^k|}{\Gamma(\alpha k + 1)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x^k|}{k!}.$$

Como  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x^k|}{k!}$  é convergente qualquer que seja  $x \in \mathbb{R}$ , então, pelo teste da comparação de séries,  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$  é absolutamente convergente, qualquer que seja  $x \in \mathbb{R}$  quando  $\alpha \geq 1$ .

Vamos agora considerar o caso em que  $\alpha \in (0, 1)$ . Seja  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $1 \leq \alpha k_0$ , então  $n \leq \alpha n k_0$ , qualquer que seja  $n \in \mathbb{N}$ . Assim

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x^k|}{\Gamma(\alpha k + 1)} = \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{|x^k|}{\Gamma(\alpha k + 1)} + \sum_{k=k_0}^{2k_0-1} \frac{|x^k|}{\Gamma(\alpha k + 1)} + \sum_{k=2k_0}^{3k_0-1} \frac{|x^k|}{\Gamma(\alpha k + 1)} + \dots$$

Em cada somatório no segundo membro, temos que  $k > n k_0 \Rightarrow \alpha k + 1 > \alpha n k_0 + 1 \geq n + 1 \geq 2$ , e como a função gama é crescente quando o argumento é maior ou igual a 2, então

$$\Gamma(\alpha k + 1) > \Gamma(\alpha n k_0 + 1) > \Gamma(n + 1) = n!$$

Assim,  $\frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} < \frac{1}{n!}$  e

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x^k|}{\Gamma(\alpha k + 1)} &< \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{|x^k|}{\Gamma(\alpha k + 1)} + \sum_{k=k_0}^{2k_0-1} \frac{|x^k|}{2!} + \sum_{k=2k_0}^{3k_0-1} \frac{|x^k|}{3!} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{|x^k|}{\Gamma(\alpha k + 1)} + \frac{|x|^{k_0}}{2!} \sum_{k=0}^{k_0-1} |x|^k + \frac{|x|^{2k_0}}{3!} \sum_{k=0}^{k_0-1} |x|^k \\ &= \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{|x|^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|x|^{(n-1)k_0}}{n!} P(x) \end{aligned}$$

sendo  $P(x) = \sum_{k=0}^{k_0-1} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{k_0-1}$ .

Olhando para o último membro, 0 primeiro somatório é finito, e portanto converge. A segunda parte também converge. Logo, a função de Mittag Leffler converge, para quaisquer  $x, \alpha \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Provamos que a função de Mittag Leffler a um parâmetro converge, entretanto, não sabemos ainda para quais valores converge. Para isso, vamos estudar os métodos utilizados por Wiman (1905), que apresentou uma ideia sobre esse assunto.

Assim como Wiman, vamos considerar a função  $E_\alpha(x)$  para o caso particular do parâmetro  $\alpha$ , com  $\alpha$  racional. Seja  $\alpha = \frac{1}{k}$  com  $k \in \mathbb{Z}$ , vamos provar que  $E_\alpha(x) \rightarrow \frac{1}{\alpha} e^{x^\alpha}$ .

Logo, queremos provar que  $E_{\frac{1}{k}}(x)$  converge para  $ke^{x^k}$ , quando  $x \rightarrow \infty$ .

Primeiro mostraremos que a função  $y = E_{\frac{1}{k}}(x)$  satisfaz a equação diferencial linear de primeira ordem dada por

$$\frac{dy}{dx} = kx^{k-1}y + k \sum_{u=1}^{k-1} \frac{x^{u-1}}{\Gamma(\frac{u}{k})}$$

ou

$$\frac{dy}{dx} - kx^{k-1}y = k \sum_{u=1}^{k-1} \frac{x^{u-1}}{\Gamma(\frac{u}{k})}$$

com a condição inicial  $y(0) = E_\alpha(0) = 1$ .

De fato, se

$$y = E_{\frac{1}{k}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\frac{n}{k} + 1)},$$

então

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{\Gamma(\frac{n}{k} + 1)} \\ &= kx^{k-1}y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{\Gamma(\frac{n}{k} + 1)} - kx^{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\frac{n}{k} + 1)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{\Gamma(\frac{n}{k} + 1)} + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{\Gamma(\frac{n}{k} + 1)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{kx^{n+k-1}}{\Gamma(\frac{n}{k} + 1)}. \end{aligned}$$

O somatório a partir de  $k$  no último membro pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{\Gamma(\frac{n}{k} + 1)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)x^{n+k-1}}{\Gamma(\frac{n+k}{k} + 1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)x^{n+k-1}}{\Gamma(\frac{n}{k} + 1 + 1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)x^{n+k-1}}{(\frac{n}{k} + 1)\Gamma(\frac{n}{k} + 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{kx^{n+k-1}}{\Gamma(\frac{n}{k} + 1)}. \end{aligned}$$

Assim, voltando na equação diferencial, temos

$$\frac{dy}{dx} - kx^{k-1}y = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{nx^{n-1}}{\Gamma(\frac{n}{k} + 1)} + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{\Gamma(\frac{n}{k} + 1)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{kx^{n+k-1}}{\Gamma(\frac{n}{k} + 1)}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{nx^{n-1}}{\Gamma(\frac{n}{k} + 1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{kx^{n+k-1}}{\Gamma(\frac{n}{k} + 1)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{kx^{n+k-1}}{\Gamma(\frac{n}{k} + 1)} \\ &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{nx^{n-1}}{\Gamma(\frac{n}{k} + 1)} = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{x^{n-1}}{\Gamma(\frac{n}{k})} = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{kx^{n-1}}{\Gamma(\frac{n}{k})}. \end{aligned}$$

E, portanto,  $y = E_{\frac{1}{k}}(x)$  satisfaz a equação diferencial dada. Por outro lado, aplicando os métodos usuais de resolução de equações diferenciais de 1ª ordem, temos que, dada a equação

$$\frac{dy}{dx} = kx^{k-1}y + k \sum_{u=1}^{k-1} \frac{x^{u-1}}{\Gamma(\frac{u}{k})},$$

multiplicando a ED pelo fator de integração  $e^{-x^k}$  obtemos

$$\begin{aligned} e^{-x^k} \frac{dy}{dx} - e^{-x^k} kx^{k-1}y &= e^{-x^k} k \sum_{u=1}^{k-1} \frac{x^{u-1}}{\Gamma(\frac{u}{k})} \\ \Rightarrow \frac{d}{dx}(ye^{-x^k}) &= e^{-x^k} k \sum_{u=1}^{k-1} \frac{x^{u-1}}{\Gamma(\frac{u}{k})} \\ \Rightarrow \int_0^x \frac{d}{dz}(ye^{-z^k}) dz &= \int_0^x e^{-z^k} k \sum_{u=1}^{k-1} \frac{z^{u-1}}{\Gamma(\frac{u}{k})} dz \\ \Rightarrow ye^{-x^k} - y(0)e^0 &= \int_0^x e^{-z^k} k \sum_{u=1}^{k-1} \frac{z^{u-1}}{\Gamma(\frac{u}{k})} dz \\ \Rightarrow y &= e^{x^k} \left[ 1 + \int_0^x e^{-z^k} k \sum_{u=1}^{k-1} \frac{z^{u-1}}{\Gamma(\frac{u}{k})} dz \right]. \end{aligned}$$

Do teorema de Picard, a solução de uma equação diferencial de ordem 1, sujeita a uma condição inicial, é única. Logo

$$E_{\frac{1}{k}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\frac{n}{k} + 1)} = e^{x^k} \left[ 1 + \int_0^x e^{-z^k} k \sum_{u=1}^{k-1} \frac{z^{u-1}}{\Gamma(\frac{u}{k})} dz \right].$$

Agora, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos que  $n = mk + u$ , com  $u = 0, 1, \dots, k - 1$ . Assim, reorganizando o primeiro somatório com  $m$  variando de 0 até  $\infty$  e  $u = 0, 1, \dots, k - 1$  temos

$$E_{\frac{1}{k}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\frac{n}{k} + 1)} = \sum_{u=0}^{k-1} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{mk+u}}{\Gamma(m + \frac{u}{k} + 1)} \right] = \sum_{u=0}^{k-1} E_{\frac{1}{k}}^{(u)},$$

e ainda

$$E_{\frac{1}{k}}^{(0)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{mk}}{\Gamma(m + 1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x^k)^m}{m!} = e^{x^k},$$

o que implica

$$\begin{aligned} \sum_{u=0}^{k-1} E_{\frac{1}{k}}^{(u)}(x) &= E_{\frac{1}{k}}(x) = \left[ 1 + \int_0^x ke^{-z^k} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{z^{n-1}}{\Gamma(\frac{n}{k})} dz \right] \\ &= e^{x^k} + \sum_{n=1}^{k-1} \left[ e^{x^k} \int_0^x ke^{-z^k} \frac{z^{n-1}}{\Gamma(\frac{n}{k})} dz \right]. \end{aligned}$$

Por comparação, para  $u = 0, 1, \dots, k - 1$

$$E_{\frac{1}{k}}^{(u)}(x) = e^{x^k} \int_0^x k e^{-z^k} \frac{z^{u-1}}{\Gamma(\frac{u}{k})} dz.$$

Assim, se  $x > 0$  segue que para qualquer  $u > 0$  podemos reescrever a equação

$$E_{\frac{1}{k}}^{(u)}(x) = e^{x^k} \int_0^\infty k e^{-z^k} \frac{z^{u-1}}{\Gamma(\frac{u}{k})} dz - \int_x^\infty k e^{-z^k} \frac{z^{u-1}}{\Gamma(\frac{u}{k})} dz. \quad (1)$$

Tomando a primeira integral

$$\int_0^\infty k e^{-z^k} \frac{z^{u-1}}{\Gamma(\frac{u}{k})} dz = \frac{1}{\Gamma(\frac{u}{k})} \int_0^\infty k e^{-z^k} z^{u-1} dz.$$

Fazendo a mudança de variáveis  $t = z^k$ , temos que  $\frac{dt}{dz} = kz^{k-1}$ . Assim

$$\begin{aligned} \int_0^\infty k e^{-z^k} \frac{z^{u-1}}{\Gamma(\frac{u}{k})} dz &= \frac{1}{\Gamma(\frac{u}{k})} \int_0^\infty e^{-z^k} \frac{z^{u-1}}{z^{k-1}} (z^{k-1}) dz \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{u}{k})} \int_0^\infty e^{-t} z^{u-k} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{u}{k})} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{u-k}{k}} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{u}{k})} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{u}{k}-1} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{u}{k})} \Gamma(\frac{u}{k}) = 1. \end{aligned}$$

Substituindo em (1), temos

$$E_{\frac{1}{k}}^{(u)}(x) = e^{x^k} - e^{x^k} \int_x^\infty k e^{-z^k} \frac{z^{u-1}}{\Gamma(\frac{u}{k})} dz.$$

Integrando por partes, tomando  $\frac{dt}{dz} = kz^{k-1} e^{-z^k}$  e  $v = \frac{z^{u-k}}{\Gamma(\frac{u}{k})}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty k e^{-z^k} \frac{z^{u-1}}{\Gamma(\frac{u}{k})} dz &= \int_x^\infty k z^{k-1} e^{-z^k} \frac{z^{u-1}}{\Gamma(\frac{u}{k})} dz \\ &= \left[ e^{-z^k} \frac{z^{u-k}}{\Gamma(\frac{u}{k})} \right]_{z=x}^\infty + \int_x^\infty (u-k) e^{-z^k} \frac{z^{u-k-1}}{\Gamma(\frac{u}{k})} dz \\ &= e^{-x^k} \frac{x^{u-k}}{\Gamma(\frac{u}{k})} + \int_x^\infty (u-k) e^{-z^k} \frac{z^{u-k-1}}{(\frac{u-k}{k}) \Gamma(\frac{u}{k}-1)} dz \\ &= e^{-x^k} \frac{x^{u-k}}{\Gamma(\frac{u}{k})} + \int_x^\infty k e^{-z^k} \frac{z^{u-k-1}}{\Gamma(\frac{u}{k}-1)} dz. \end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$E_{\frac{1}{k}}^{(u)}(x) = e^{x^k} - e^{x^k} \int_x^\infty k e^{-z^k} \frac{z^{u-k-1}}{\Gamma(\frac{u}{k}-1)} dz$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{x^k} - e^{x^k} \left[ e^{-x^k} \frac{x^{u-k}}{\Gamma(\frac{u}{k})} + \int_x^\infty k e^{-z^k} \frac{z^{u-k-1}}{\Gamma(\frac{u}{k}-1)} dz \right] \\
 &= e^{x^k} - \left[ \frac{x^{u-k}}{\Gamma(\frac{u}{k})} + e^{x^k} \int_x^\infty k e^{-z^k} \frac{z^{u-k-1}}{\Gamma(\frac{u}{k}-1)} dz \right],
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 E_{\frac{1}{k}}(x) &= \sum_{u=0}^{k-1} E_{\frac{1}{k}}^{(u)}(x) \\
 &= E_{\frac{1}{k}}^{(0)}(x) + \sum_{u=1}^{k-1} E_{\frac{1}{k}}^{(u)}(x) \\
 &= e^{x^k} + \sum_{u=1}^{k-1} \left( e^{x^k} - \frac{x^{u-k}}{\Gamma(\frac{u}{k})} - e^{x^k} E_{\frac{1}{k}}^{(u)}(x) \int_x^\infty k e^{-z^k} \frac{z^{u-k-1}}{\Gamma(\frac{u}{k}-1)} dz \right) \\
 &= e^{x^k} + (k-1) e^{x^k} \sum_{u=1}^{k-1} \left( \frac{x^{u-k}}{\Gamma(\frac{u}{k})} + e^{x^k} \int_x^\infty k e^{-z^k} \frac{z^{u-k-1}}{\Gamma(\frac{u}{k}-1)} dz \right) \\
 &= k e^{x^k} - \sum_{u=1}^{k-1} \left( \frac{x^{u-k}}{\Gamma(\frac{u}{k})} + e^{x^k} \int_x^\infty k e^{-z^k} \frac{z^{u-k-1}}{\Gamma(\frac{u}{k}-1)} dz \right).
 \end{aligned}$$

Portanto temos

$$\left| E_{\frac{1}{k}}(x) - k e^{x^k} \right| = \sum_{u=1}^{k-1} \left( \frac{x^{u-k}}{\Gamma(\frac{u}{k})} + e^{x^k} \int_x^\infty k e^{-z^k} \frac{z^{u-k-1}}{\Gamma(\frac{u}{k}-1)} dz \right). \quad (2)$$

Tomando a integral definida de  $x$  até  $\infty$ , note que como  $z \geq x$ , então  $e^{-z^k} \leq e^{-x^k}$ , e disto segue que

$$\begin{aligned}
 e^{x^k} \int_x^\infty k e^{-z^k} \frac{z^{u-k-1}}{\Gamma(\frac{u}{k}-1)} dz &\leq e^{x^k} \int_x^\infty e^{-x^k} \frac{k}{\Gamma(\frac{u}{k}-1)} z^{u-k-1} dz \\
 &= e^{x^k} e^{-x^k} \frac{k}{\Gamma(\frac{u}{k}-1)} \int_x^\infty z^{u-k-1} dz \\
 &= \frac{k}{\Gamma(\frac{u}{k}-1)} \left[ \frac{z^{u-k}}{u-k} \right]_{z=x}^\infty \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\frac{u}{k})(\frac{u}{k}-1)} [z^{u-k}]_{z=x}^\infty \\
 &= \frac{x^{u-k}}{\Gamma(\frac{u}{k})}.
 \end{aligned}$$

Como  $u = 1, 2, \dots, k-1$ , temos que  $u-k < 0$ , então  $z^{u-k}$  é nulo quando  $z \rightarrow \infty$ . Aplicando isto em (2), temos

$$\left| E_{\frac{1}{k}}(x) - k e^{x^k} \right| \leq 2 \sum_{u=1}^{k-1} \frac{x^{u-k}}{\Gamma(\frac{u}{k})}.$$

Como  $u = 1, 2, \dots, k-1$ , então  $\frac{u}{k} \in (0, 1)$  e portanto  $\Gamma(\frac{u}{k}) > 1$ . Disto

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{u}{k})} < 1 \Rightarrow \sum_{u=1}^{k-1} \frac{x^{u-k}}{\Gamma(\frac{u}{k})} < \sum_{u=1}^{k-1} x^{u-k} = \sum_{n=1}^{k-1} x^{-n},$$

donde

$$\left| E_{\frac{1}{k}}(x) - ke^{x^k} \right| \leq 2 \sum_{n=1}^{k-1} x^{-n}.$$

Observe que o segundo membro da desigualdade vai para 0 quando  $x \rightarrow \infty$ , isto é,  $E_{\frac{1}{k}}(x)$  se aproxima de  $ke^{x^k}$  à medida que  $x$  cresce, para  $\alpha = \frac{1}{k}$ . Como  $\alpha = \frac{1}{k}$ , segue que  $E_{\frac{1}{k}}(x)$  se aproxima de  $\frac{1}{\alpha}e^{x^{\frac{1}{\alpha}}}$  à medida que  $x$  cresce.

## Referências

- Camargo, Rubens Figueiredo e Oliveira, Edmundo Capelas de. *Cálculo fracionário*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.
- Humbert, P. e Agarwal, R. P. *Sur la fonction de Mittag-Leffler et quelques-unes de ses généralisations*. Bull. Sci. Mathématiques, **77**, 180-185, (1953).
- Mittag-Leffler, Magnus G. *Sur la nouvelle fonction  $E_{\alpha}(x)$* . Comp. Rend. Acad. Sci. Paris. **137**, 554-558 (1903).
- Mittelbach, Frank. *The L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Companion*. 2ª edição. Boston: Pearson Education, 2004.
- Wiman, A. *Über den fundamentalsatz in der theorie der funktionen  $E_{\alpha}(x)$* . Acta Math, **29**, 191-201, (1905).

## Buscando fundamentar a ação docente: “0,999... é 1?”

Arleni Elise Sella Langer<sup>1</sup>

Professora do Curso de Licenciatura em Matemática da Unioeste  
arleni.sella@unioeste.br

João Alfredo Simon Santos<sup>1</sup>

Acadêmico de Licenciatura em Matemática da Unioeste Cascavel  
joaoalfredosimon@hotmail.com

Lucas Teixeira Bernardo<sup>1</sup>

Acadêmico de Licenciatura em Matemática da Unioeste Cascavel  
lucastbernardo@gmail.com

Suenir Barreto dos Anjos<sup>1</sup>

Acadêmica de Licenciatura em Matemática da Unioeste Cascavel  
suenir\_anjos@hotmail.com

**Resumo:** Este texto tem por finalidade relatar a experiência vivenciada nos Anos Finais do Ensino Fundamental da Rede Pública, no Colégio Estadual Pacaembu, no município de Cascavel, Paraná. A atividade aconteceu sob a orientação do professor Josemar Santi, supervisor do subprojeto de Matemática vinculado ao Projeto Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência – Pibid, do Campus de Cascavel da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste. Os autores deste resumo acompanham o professor supervisor nas turmas de oitavos anos do período vespertino. Durante a abordagem de números racionais, surgiu a questão envolvendo as frações geratrizes das dízimas periódicas. A proposta foi realizada pelo professor regente da turma, Josemar Santi, por meio de experimentações e investigações do conteúdo, salientando a aplicação dos números racionais por meio das frações geratrizes das dízimas periódicas.

**Palavras-chave:** Dízimas Periódicas; Conjuntos Numéricos; PIBID.

### 1 A situação vivida e os conflitos gerados

Um dos objetivos desse trabalho é a reflexão sobre os conceitos de Números e Álgebra, abordados nos anos finais do Ensino Fundamental, com o intuito de discutirmos a problemática “0,999... é igual a 1?” Ao explorar conjuntos numéricos, particularmente o conjunto dos números racionais, expressos nas formas decimais e fracionárias nos deparamos com as frações geratrizes das dízimas periódicas e a problemática surgida a partir dessa exploração. Tal problemática se contextualiza em dois oitavos anos do ensino regular, onde acompanhamos e realizamos intervenções proporcionadas pelo Programa de Bolsas de Iniciação à docência - Pibid, supervisionados pelo professor regente das turmas e orientados por professores universitários da Unioeste, campus Cascavel. Os conteúdos organizados em cada ano do ensino fundamental estão arrolados

<sup>1</sup>Bolsista de Coordenação de área do Subprojeto de Matemática, Campus Cascavel.

nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica (PARANÁ, 2008), que consideram Números e Álgebra como sendo um conteúdo estruturante. O documento chama a atenção para a importância da prática da articulação e contextualização dos conteúdos. Contudo ressalva que o contexto seja apenas o ponto de partida para o desenvolvimento do pensamento abstrato e da posterior sistematização do conhecimento. Adverte sugerindo que “aquilo que lhe parece sem sentido seja problematizado e apreendido” (PARANÁ, 2008, p.28), conforme discute Ramos:

Quando se parte do contexto de vivência do aluno, é preciso enfrentar as concepções prévias que eles trazem e que, mesmo consideradas como conhecimento tácito, podem estar no plano do senso comum, constituído por representações equivocadas ou mesmo limitadas para a compreensão e a explicação da realidade. (RAMOS apud PARANA, 2008, p.28).

Enfatizamos que no Ensino Fundamental o conteúdo Números e Álgebra se desdobra, entre outros em conjuntos numéricos e operações. Segundo as Diretrizes “Nesse mesmo nível de Ensino, é necessário ainda que haja articulação entre álgebra e os números” (PARANÁ, 2008, p. 51). Na situação que ora relatamos e sobre a qual refletimos, essa articulação era a proposta e relacionava a busca pela fração geratriz com as equações. Encontrar a fração geratriz por meio de equações é a alternativa mais utilizada no Ensino Fundamental, onde se desenvolveu a proposta desse trabalho, sendo as equações a conexão entre números e álgebra. Esse processo consiste em denominar a fração geratriz que queremos determinar, montando uma equação do tipo:

$$x = 0,888\dots$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por um número conveniente, de modo que se possa subtrair, do novo resultado, o resultado anterior. Ou seja, se multiplicarmos ambos os termos da igualdade por 10, obteremos:

$$10x = 8,888\dots$$

Então, subtraindo da primeira equação a segunda teremos:

$$9x = 8$$

E, por fim:

$$x = \frac{8}{9}$$

O professor supervisor que acompanhamos explorou diversas resoluções similares e, intencionalmente, propôs desestabilizar o consenso com a introdução de uma situação peculiar que daria origem a um debate interessante. A atividade consistia em encontrar a fração geratriz da dízima “0,999...”, a qual os estudantes aceitaram e seguiram resolvendo-a. E, para surpresa dos educandos, classificaram como estranho o que ocorreu: ao tomarem a dízima periódica “0,999...” e resolverem a equação, obtiveram:

$$x = 1$$

Ao perguntarmos aos estudantes sobre a veracidade de tal igualdade as opiniões variavam. Por vezes, questionamentos surgiam: “Não é igual. Por que quando faço a conta, dá 1?” Assim, foi necessário explicar aos alunos que “0,999...” é igual a 1, não só porque aplicando as alternativas anteriormente citadas, “0,999...” resulta em 1, mas por não existir nenhum número real, nem mesmo aproximações ou arredondamentos que somado com “0,999...” resulte em 1. Essas argumentações convenceram os estudantes, e também aquietaram aqueles que relutavam em aceitar o resultado obtido. Os diálogos decorrentes dessa experiência nos fizeram refletir sobre o quanto o professor precisa estar preparado para abordar temas que surgem em aula.

Esses conflitos e argumentações geraram reflexões acerca da abordagem utilizada pelo professor regente das turmas, em consonância com as Diretrizes Curriculares para Educação Básica (2008). Nosso aprofundamento neste tema permitiu que compreendêssemos que à apreensão do conhecimento adquirido em contexto escolar, por parte dos estudantes, precisa “enfrentar o questionamento, colocá-los em cheque num processo de desconstrução de conceitos e reconstrução/apropriação de outros”, conforme Ramos (p.2, 2004). Assim, a proposta realizada pelo professor regente das turmas, por meio de experimentações e investigações do conteúdo, salientou a aplicação dos números racionais inclusive das frações geratrizes das dízimas periódicas, ressignificando os conceitos no contexto vivenciado por nós e pelos seus alunos.

## 2 Infinito atual e potencial

Nesse sentido, partimos ao estudo acerca do entendimento daquilo que se considera infinito por meio da compreensão das teorias infinito atual e infinito potencial, a fim de nos fundamentarmos e nos aprofundarmos acerca da escolha metodológica do professor regente das turmas.

A concepção de infinito potencial nos leva a pensar em sempre acrescentar uma unidade a mais, um elemento a mais, sem chegar em um “fim”, como no conjunto dos números naturais em que, qualquer que seja o número escolhido, ele sempre terá um sucessor. Hilbert ao redor de 1925, usou a ideia de infinito potencial para estudar seu paradoxo, o Paradoxo do Hotel de Hilbert. A definição de limite foi feita a partir da ideia do infinito potencial, quando trabalhamos assíntotas, por exemplo, em que o gráfico da função chega tão perto quanto se deseja da assíntota, mas nunca chega a tocá-la, ou seja, a assíntota é uma barreira para o maior (ou menor) valor da função.

Já na ideia de infinito atual, desenvolvida por Cantor em torno de 1874, o infinito é algo existente, concluído, isto é, já realizado, e não um processo como no caso do infinito potencial. Um exemplo seriam as áreas de quadrados: se a área não for um quadrado perfeito, a medida de seu lado não será um número racional. Tomemos um quadrado de área 20 cm. Logo, a medida de seu lado tem de ser  $\sqrt{20}=4,47213595\dots$ cm. As casas decimais desse número continuam “infinitamente”, porém, se quisermos desenhar o quadrado de área 20 cm, devemos desenhar o lado do quadrado, que vale  $\sqrt{20}$ . Assim, estamos colocando algo “infinito” dentro de um conjunto limitado, no caso, estamos colocando uma medida infinita, nesse caso, incomensurável,

dentro de um segmento de reta – o lado do quadrado –, que tem começo e fim.

Para ficar mais claro a diferença entre os infinitos, vamos analisar a adição de  $\frac{2}{3}$  com  $\frac{1}{3}$ , pois sabemos que essa soma é 1. Se fizermos  $\frac{1}{3} = 0,333\dots$  e  $\frac{2}{3} = 0,666\dots$ , temos  $0,999\dots = 1$ . Tal demonstração só é possível com a ideia de infinito atual (realizado), pois com o infinito potencial (processo),  $\frac{1}{3}$  é diferente de  $0,333\dots$ , ele é apenas uma aproximação que vai se tornando mais precisa conforme aumentamos o número de casas decimais; da mesma forma,  $\frac{2}{3}$  é diferente de  $0,666\dots$  e, assim,  $0,999\dots$  é diferente de 1, sendo apenas uma aproximação.

Então, existem outros métodos para nos convenceremos do fato de que “ $0,999\dots$  seja igual a 1”. Por exemplo, o método das séries geométricas, onde podemos usar a fórmula de convergência de uma série geométrica para mostrar que “ $0,999\dots$ ” converge para 1, ou podemos utilizar o método de equações, onde igualamos:

$$\frac{1}{3} = 0,333\dots$$

E multiplicamos ambos os lados da igualdade por 3, obtendo:

$$1 = 0,999\dots$$

Portanto, a partir de todos os pontos que foram analisados até aqui, podemos, então, concluir que “ $0,999\dots$  é, de fato, 1”. A comunidade matemática toma essa afirmação como verdadeira, pois ainda não foi possível contradizê-la. Ressaltamos, ainda, que esse pensamento só foi possível graças a ideia de infinito atual, que contradiz a teoria do infinito potencial.

### 3 Algumas Considerações

Assim sendo, ressaltamos que um processo prático para realizar a transformação de dízimas periódicas simples, não adotado pelo professor, consiste em partir de uma fração que tem para numerador o período e, para denominador tantos noves quantos forem os algarismos do período, conforme demonstrado na Figura 1.

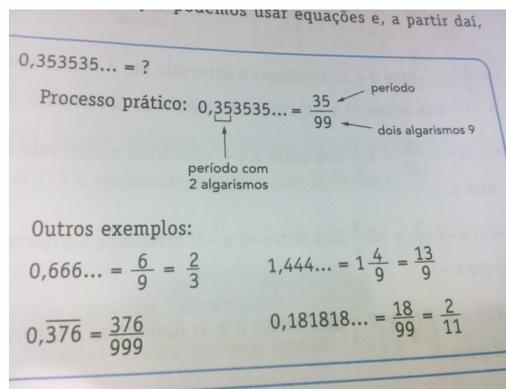


Figura 1: Exemplificação do processo

Fonte: DANTE, L. R. Tudo é Matemática. 3. ed. São Paulo: Ática, 2009. Página 23.

E, em outro caso, para as dízimas periódicas compostas, o numerador será a parte não-periódica seguida da parte periódica, subtraindo a parte não-periódica, enquanto no denominador haverá tantos noves quantos forem os algarismos da parte periódica e, tantos zeros quanto forem os algarismos da parte não periódica, conforme a Figura 2.

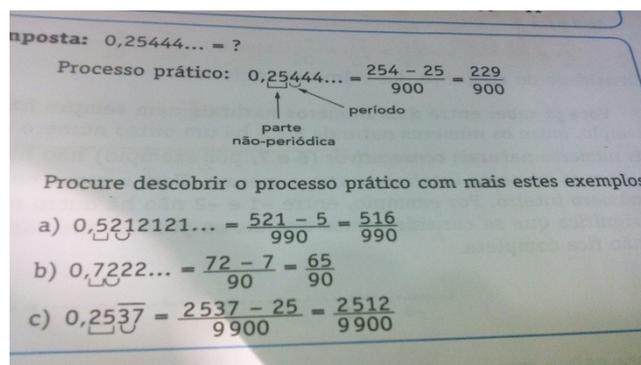


Figura 2: Exemplificação do processo

Fonte: DANTE, L. R. Tudo é Matemática. 3. ed. São Paulo: Ática, 2009. Página 23.

Neste contexto, entendemos que a abstração do conceito e sua aplicação por meio de regras além de não ser de fácil compreensão pode gerar outros conflitos. Optar pelo uso desse processo exige que o aluno tenha que memorizar diversos casos, situação a qual não dará autonomia. Se o aluno memoriza que a fração geratriz é uma fração cujo numerador é o período, e o denominador possui tantos noves quantos forem os algarismos do período, ele pode compreender que sabe e assim aplicar a mesma regra para uma dízima do tipo “0,25444...” que, neste caso, estará equivocada mesmo que o estudante siga a regra corretamente, pois irá se deparar com uma rede conceitual que o impede de aplicar a regra em seus diferentes moldes. A regra talvez poderá ter sentido quando o estudante tiver a intuição direcionada à compreensão da regra, sendo que, para isso, seja necessária a mediação do professor, de forma que se consiga entrelaçar as regras com os conceitos envolvidos e, dessa forma, a regra não seja aplicada apenas de maneira mecânica e os estudantes consigam atribuir sentido aos procedimentos com o quais se depara. Levando em consideração que esse método trabalha somente a memorização, e não

provoca no educando a compreensão e a reflexão acerca do conteúdo estudado, dificultando assim a resolução de casos particulares. Por isso, entendemos que o professor optou por um processo que possibilitou a maior compreensão e a resignificação dessas situações na vivência de seus estudantes. Nossas reflexões prosseguiram a respeito de como participar do Pibid oportuniza vivenciar a realidade da escola, relacionando-a com nossas aulas da graduação resultando numa formação docente mais aprofundada. Ainda, consideramos que outra alternativa para provar esse questionamento seria o método das séries (ou progressões geométricas), no qual se tem um limite cujo resultado também é 1. E, ainda, entendemos que a reflexão sobre a ação pedagógica pode promover mudanças e, é isso que buscamos. Salientamos, também, a importância da compreensão dos conteúdos para o prosseguimento dos estudos dos alunos. Sentimos, inclusive em nossa história, agora no ensino superior o quanto discussões e argumentações dessa espécie poderiam ter enriquecido nossa vida escolar e nos embasado para os estudos posteriores.

## Agradecimentos

Este trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), entidade do governo brasileiro voltada para a formação de recursos humanos.

## Referências

- BORGES, B. A. O infinito na matemática. Tese Mestrado Profissional PROFMAT - Instituto de Ciências Matemáticas e Computação, USP São Carlos, 2015. 89 f (2015).
- DANTE, L. R. Tudo é Matemática. 3. ed. São Paulo: Ática, 2009.
- KATZ, K.; WHEN, M. 0,999... is less than 1? The Montana Mathematics Enthusiast. 2010. Vol 7. No 1. Janeiro, 2010.
- PARANÁ. Secretaria da Educação do Paraná. Departamento de Educação Básica. Diretrizes Curriculares da Educação Fundamental da Rede de Educação Básica do Estado do Paraná - Matemática. Secretaria de Estado da Educação do Paraná: Curitiba, 2008.
- RAMOS, M. N. O Projeto Unitário de Ensino Médio sob os princípios do trabalho, da ciência e da cultura. In: FRIGOTTO, G. e CIAVATTA, M. Ensino médio ciência, cultura e trabalho. Brasília: MEC, SEMTEC, 2004.
- SENA, C. O. R. Uma história sobre o infinito atual. 30 f. Monografia - Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática – UFMG. Belo Horizonte, 2011.

## O problema do empacotamento esférico

Naísa Camila Garcia Tosti  
UNIOESTE  
naisacamila@hotmail.com

**Resumo:** O propósito deste trabalho é apresentar o problema do empacotamento esférico, pois, além de ter importante aplicação em sistemas de telecomunicação, possui grandes questões em aberto. Dentro deste problema, nos restringimos ao estudo dos empacotamentos cujo conjunto dos centros, das esferas, seja um subgrupo discreto de  $\mathbb{R}^n$ , o qual denominamos reticulados.

**Palavras-chave:** Empacotamento esférico; reticulados; homomorfismo de Minkowski.

### 1 Introdução

O problema clássico do empacotamento esférico, se resume em dispor esferas idênticas,  $n$ -dimensionais em  $\mathbb{R}^n$ , não sobrepostas, de maneira que, o maior volume possível seja ocupado. Este problema, além de possuir grandes questões em aberto, tem aplicação em sistemas de telecomunicação pois é equivalente, no espaço, ao problema de determinar o melhor código corretor de erros.

Neste trabalho, nos restringiremos ao estudo dos empacotamentos esféricos cujo conjunto dos centros é um subconjunto discreto de  $\mathbb{R}^n$ , o qual denominamos reticulados.

Inicialmente, abordaremos os reticulados no  $\mathbb{R}^n$ , posteriormente, abordaremos os reticulados algébricos, que são reticulados em  $\mathbb{R}^n$  obtidos como imagem de um homomorfismo aplicado à um  $\mathbb{Z}$ -módulo de um corpo de números de grau  $n$ . Posteriormente, faremos uma breve aplicação, com o intuito de exemplificar os conceitos aqui abordados.

### 2 Reticulados no $\mathbb{R}^n$

Nesta seção, iremos matematizar o problema do empacotamento esférico. Iniciaremos então, com as seguintes definições:

**Definição 1.** Sejam  $r > 0$  e  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . A esfera  $n$ -dimensional de raio  $r$  e centro em  $x_0$  é denotada por  $S(x_0, r)$  e definida por:

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| \leq r\}.$$

**Definição 2.** Um empacotamento esférico em  $\mathbb{R}^n$  é uma disposição de esferas  $n$ -dimensionais de mesmo raio em  $\mathbb{R}^n$ , de modo que a interseção de duas esferas quaisquer tenha no máximo um ponto.

O interesse deste trabalho são os casos em que os centros, de tais esferas, constituem um subconjunto discreto de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 3.** Sejam  $n$  um inteiro positivo e  $\{v_1, \dots, v_m\}$  um conjunto de vetores de  $\mathbb{R}^n$ , com  $m \leq n$ , linearmente independentes sobre  $\mathbb{R}$ . Definimos o reticulado  $\Lambda$  de posto  $m$  e base  $\{v_1, \dots, v_m\}$  como sendo o conjunto

$$\Lambda = \left\{ \sum_{i=1}^m a_i v_i; a_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

O próximo resultado, é a equivalência de que todo subgrupo discreto de  $\mathbb{R}^n$  é um reticulado, sua demonstração será omitida mas, pode ser encontrada na referência citada:

**Teorema 4.** ([PIERRE], pág: 53) *Seja  $\mathcal{H}$  um subgrupo discreto de  $\mathbb{R}^n$ . Então,  $\mathcal{H}$  é gerado como um  $\mathbb{Z}$ -módulo por  $r$  vetores linearmente independentes sobre  $\mathbb{R}$  com  $r \leq n$ .*

**Definição 5.** Um empacotamento reticulado é aquele cujo conjunto dos centros é um reticulado.

Vale ressaltar que, no problema do empacotamento esférico, estamos buscando preencher a maior área do  $\mathbb{R}^n$ . Obter a fórmula que calcula esta proporção será nosso próximo objetivo. Calcular a proporção que as esferas ocupam em  $\mathbb{R}^n$  é equivalente a calcular a proporção que elas ocupam em uma região fundamental, que é definida por:

**Definição 6.** Dado  $\Lambda$  um reticulado, de  $\mathbb{R}^n$ , e  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  uma base de  $\Lambda$ , o conjunto

$$\mathcal{R}(\mathcal{B}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n; x = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i; 0 \leq \lambda_i < 1 \right\},$$

é chamado de região fundamental de  $\Lambda$  com relação à base  $\mathcal{B}$ .

Logo, para um mesmo reticulado  $\Lambda$  de  $\mathbb{R}^n$ , existem inúmeras maneiras de se escolher uma base e uma região fundamental. No entanto, isto não é um problema, pois independente da escolha, o volume será sempre o mesmo.

**Lema 7.** ([PIERRE], pág: 55) *O volume da região fundamental  $v(\mathcal{R})$  independe da base escolhida.*

Isto posto, de agora em diante, denotaremos  $v(\mathcal{R})$  por  $v(\Lambda)$ .

Para calcular a proporção que as esferas ocupam na região fundamental, precisamos do volume de cada esfera, além disso, como nosso objetivo é ocupar o maior espaço possível, precisamos do maior raio admissível. Dado um reticulado em  $\mathbb{R}^n$ , à este maior raio, para o qual seja possível definir um empacotamento de  $\Lambda$ , denominamos *raio de empacotamento* de  $\Lambda$  e é dado por:

$$\rho = \frac{\min\{|\lambda|; \lambda \in \Lambda, \lambda \neq 0\}}{2}.$$

Sendo assim, definimos a *densidade de empacotamento* de  $\Lambda$ , que calcula a proporção que a esfera ocupa na região fundamental, como sendo

$$\Delta(\Lambda) = \frac{\text{volume de uma esfera de raio } \rho}{\text{volume da região fundamental}}.$$

Além disso, a densidade de empacotamento pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\Delta(\Lambda) = \frac{v(S(\rho))}{v(\mathcal{R})} = v(S(1)) \cdot \frac{\rho^n}{v(\Lambda)},$$

onde  $S(\rho)$  é a esfera de centro na origem e raio  $\rho$ .

**Definição 8.** Definimos a densidade de centro  $\delta(\Lambda)$  do reticulado  $\Lambda$  como sendo

$$\delta(\Lambda) = \frac{\rho^n}{v(\Lambda)}.$$

Donde, o problema do empacotamento esférico, pode ser simplificado ao estudo da densidade de centro, isto é, nosso objetivo passa a obter a maior a densidade de centro.

**Exemplo 9.** Seja  $\Lambda$  o reticulado em  $\mathbb{R}$  gerado por 1, isto é,  $\Lambda = \mathbb{Z}$ . Temos que,  $\min\{|\lambda|; \lambda \in \Lambda, \lambda \neq 0\} = 1$ . Assim,  $\rho = 1/2$  é o raio de empacotamento de  $\Lambda$ . Além disso,  $v(\Lambda) = 1$  e  $v(S(1)) = 2$ , portanto

$$\Delta(\Lambda) = 1 \quad \text{e} \quad \delta(\Lambda) = \frac{1}{2}.$$

Este reticulado tem a maior densidade de empacotamento em  $\mathbb{R}$ .

**Exemplo 10.** Seja  $\Lambda$  o reticulado de  $\mathbb{R}^2$  gerado pela base  $\{(1,0), (1/2, \sqrt{3}/2)\}$ , ou seja,  $\Lambda = \mathbb{Z}(1,0) + \mathbb{Z}(1/2, \sqrt{3}/2)$ . Assim sendo,  $\min\{|\lambda|; \lambda \in \Lambda, \lambda \neq 0\} = 1$ , logo  $\rho = 1/2$  é o raio de empacotamento de  $\Lambda$ . Além disso,

$$v(\Lambda) = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3}/2.$$

Além do mais,  $v(S(1)) = \pi$ , e  $\rho^2 = 1/4$ , donde

$$\Delta(\Lambda) = \frac{\pi}{\sqrt{12}} \simeq 0,9069 \quad \text{e} \quad \delta(\Lambda) = \frac{1}{\sqrt{12}} \simeq 0,2886751.$$

Este reticulado tem a maior densidade de empacotamento em  $\mathbb{R}^2$ .

Logo, para as dimensões 1 e 2, o problema está solucionado, conforme [SLOANE].

### 3 Reticulados Algébricos

Agora, queremos identificar um  $\mathbb{Z}$ -módulo livre de posto  $n$ , contido num corpo de números  $\mathbb{K}$  de grau  $n$ , com um reticulado de  $\mathbb{R}^n$  pois, como já foi dito, os reticulados algébricos são obtidos através da imagem de um homomorfismo aplicado à um  $\mathbb{Z}$ -módulo. Lembremos que:

**Definição 11.** Definimos um corpo de números como sendo uma extensão finita de  $\mathbb{Q}$ , isto é,  $\mathbb{K}$  é um corpo de números se  $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$  é finito.

Seja  $\mathbb{K}$  um corpo de números de grau  $n$ . Lembremos que o polinômio minimal de um elemento primitivo de  $\mathbb{K}$  sobre  $\mathbb{Q}$  tem exatamente  $n$  raízes em  $\mathbb{C}$ , pois  $\mathbb{C}$  é algebricamente fechado, portanto, existem  $n$  distintos monomorfismos  $\sigma_i : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{C}$ .

Sempre que  $\sigma_j(\mathbb{K}) \subset \mathbb{R}$ , dizemos que  $\sigma_j$  é um *monomorfismo real*, caso contrário, dizemos que  $\sigma_j$  é um *monomorfismo imaginário*. Além disso, se  $\sigma_j$  é um monomorfismo imaginário, seu conjugado complexo difere dele e é também um monomorfismo imaginário, conseqüentemente, sempre temos um número par de monomorfismos imaginários. Assim, denotando o número de monomorfismos reais por  $r_1$  e o número de monomorfismos imaginários por  $2r_2$ , teremos que  $n = r_1 + 2r_2$ . Quando  $\mathbb{K}$  possuir apenas monomorfismos reais, dizemos que  $\mathbb{K}$  é um *corpo totalmente real*, da mesma forma que, se ele possuir apenas monomorfismos imaginários, dizemos que  $\mathbb{K}$  é um *corpo totalmente imaginário*.

Podemos, sempre, ordenar os monomorfismos, a fim de que  $\sigma_1, \dots, \sigma_{r_1}$  sejam os monomorfismos reais e  $\sigma_{r_1+1}, \dots, \sigma_{r_1+2r_2}$  correspondam aos monomorfismos imaginários, onde  $\sigma_{r_1+2r_2+j}$  seja o conjugado de  $\sigma_{r_1+j}$  para  $j = 1, \dots, r_2$ . Assim, temos a seguinte:

**Definição 12.** O homomorfismo injetivo de anéis  $\sigma_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definido por:

$$\sigma_{\mathbb{K}}(x) = (\sigma_1(x), \dots, \sigma_{r_1}(x), Re(\sigma_{r_1+1}(x)), Im(\sigma_{r_1+1}(x)), \dots, Re(\sigma_{r_1+2r_2}(x)), Im(\sigma_{r_1+2r_2}(x))),$$

é chamado de homomorfismo de Minkowski, ou homomorfismo canônico, onde  $Re(z)$  e  $Im(z)$  representam, respectivamente, a parte real e imaginária de um número complexo  $z$ .

**Proposição 13.** ([PIERRE], pág: 56) *Seja  $\mathbb{K}$  um corpo de números de grau  $n$ . Se  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{K}$  é um  $\mathbb{Z}$ -módulo livre de posto  $n$  e se  $\{x_1, \dots, x_n\}$  é uma  $\mathbb{Z}$ -base de  $\mathcal{M}$ , então  $\sigma_{\mathbb{K}}(\mathcal{M})$  é um reticulado em  $\mathbb{R}^n$ , cujo volume é:*

$$v(\sigma_{\mathbb{K}}(\mathcal{M})) = 2^{-r_2} \left| \det_{1 \leq i, j \leq n} (\sigma_i(x_j)) \right|$$

Portanto, o homomorfismo de Minkowski é a identificação que estamos interessados.

## 4 Aplicação

O objetivo desta seção é exemplificar os conceitos abordados, e não solucionar o problema do empacotamento esférico.

Sendo assim, obteremos um reticulado, via homomorfismo de Minkowski, para o corpo  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\zeta_{15})^+ = \mathbb{Q}(\zeta_{15} + \zeta_{15}^{-1})$ , onde  $\zeta_{15} = e^{\frac{2\pi i}{15}}$ , a raiz 15-ésima primitiva da unidade, e  $\mathbb{Q}(\zeta_{15})^+$  denota o subcorpo real maximal de  $\mathbb{Q}(\zeta_{15})$ , ou seja, todo os subcorpo de  $\mathbb{Q}(\zeta_{15})$  totalmente real está contido em  $\mathbb{Q}(\zeta_{15})^+$ .

Uma vez que o conjunto  $\{1, \zeta_{15} + \zeta_{15}^{-1}, \zeta_{15}^2 + \zeta_{15}^{-2}, \zeta_{15}^3 + \zeta_{15}^{-3}\}$  é uma base de  $\mathbb{K}$  e, além disso,  $Gal(\mathbb{K}|\mathbb{Q}) = \langle \sigma_2 \rangle$ , onde  $\sigma_2(1) = 1$ ,  $\sigma_2(\zeta_{15} + \zeta_{15}^{-1}) = \zeta_{15}^2 + \zeta_{15}^{-2}$ ,  $\sigma_2(\zeta_{15}^2 + \zeta_{15}^{-2}) = \zeta_{15}^4 + \zeta_{15}^{-4}$ ,  $\sigma_2(\zeta_{15}^3 + \zeta_{15}^{-3}) = \zeta_{15}^6 + \zeta_{15}^{-6}$ , escolhemos o  $\mathbb{Z}$ -módulo  $\mathcal{M}$  de  $\mathbb{K}$ , cuja base é formada por  $3(\zeta_{15} + \zeta_{15}^{-1})$ ,

$\zeta_{15}^3 + \zeta_{15}^{-3}$ ,  $\sigma_2(3(\zeta_{15} + \zeta_{15}^{-1}))$  e  $\sigma_2(\zeta_{15}^3 + \zeta_{15}^{-3})$ , isto é,  $\mathcal{B} = \{3(\zeta_{15} + \zeta_{15}^{-1}), 3\sigma_2(\zeta_{15} + \zeta_{15}^{-1}), \zeta_{15}^3 + \zeta_{15}^{-3}, \sigma_2(\zeta_{15}^3 + \zeta_{15}^{-3})\} = \{3(\zeta_{15} + \zeta_{15}^{-1}), 3(\zeta_{15}^2 + \zeta_{15}^{-2}), \zeta_{15}^3 + \zeta_{15}^{-3}, -1 - (\zeta_{15}^3 + \zeta_{15}^{-3})\}$  forma uma  $\mathbb{Z}$ -base para  $\mathcal{M}$ . Além disso, pela Proposição 13, a imagem de um  $\mathbb{Z}$ -módulo pelo homomorfismo de Minkowski é um reticulado, cujo volume é o determinante da matriz  $M$  dada por: a primeira coluna são os elementos da base, a segunda é a imagem de  $\sigma_2$  da primeira, a terceira coluna é a imagem de  $\sigma_2^2$  da primeira, ou equivalentemente, a imagem de  $\sigma_2$  da segunda, e por fim, a quarta é a imagem de  $\sigma_2^3$  da primeira, ou a imagem de  $\sigma_2$  da terceira. Isto é:

$$M = \begin{pmatrix} 3\alpha_1 & 3\alpha_2 & 3 - 3\alpha_1 + 3\alpha_3 & -3\alpha_2 - 3\alpha_3 \\ 3\alpha_2 & 3 - 3\alpha_1 + 3\alpha_3 & -3\alpha_2 - 3\alpha_3 & 3\alpha_1 \\ \alpha_3 & -1 - \alpha_3 & \alpha_3 & -1 - \alpha_3 \\ -1 - \alpha_3 & \alpha_3 & -1 - \alpha_3 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

onde,  $\alpha_i = \zeta_{15}^i + \zeta_{15}^{-i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Donde,  $\det M = 135(2 + \sqrt{5})$ . Além disso, pode-se provar, consultar [GARCIA TOSTI], que neste caso o raio de empacotamento é obtido minimizando a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} |\sigma_{\mathbb{K}}(v)|^2 &= 81X_1^2 + 81X_2^2 + 6X_3^2 + 6X_4^2 - 18X_1X_2 + 12X_1X_3 - 18X_1X_4 - 18X_2X_3 + 12X_2X_4 - 8X_3X_4 \\ &= (3X_1 - 3X_2)^2 + (6X_1 + X_3)^2 + (6X_1 - X_4)^2 + (6X_2 + X_4)^2 + (6X_2 - X_3)^2 + (2X_3 - 2X_4)^2 \\ &\quad - 6(X_1X_4 + X_2X_3) \end{aligned}$$

onde  $v \in \mathcal{M}$ .

Temos que,  $|\sigma_{\mathbb{K}}(v)|^2$  assume valor mínimo quando  $X_1 = 0$ ,  $X_2 = 0$ ,  $X_3 = 1$  e  $X_4 = 1$ . Neste caso,  $|\sigma_{\mathbb{K}}(v)|^2 = 4$  conseqüentemente,  $|\sigma_{\mathbb{K}}(v)| = 2$  e portanto,  $\rho = 1$ . Logo,

$$\delta = \frac{1}{135(2 + \sqrt{5})} \approx 0,001$$

Esta e outras aplicações similares podem ser consultadas em [GARCIA TOSTI].

## Agradecimentos

Ao professor Dr. Trajano Pires da Nóbrega Neto pela orientação durante o mestrado.

## Referências

- SAMUEL, P. Algebraic Theory of Numbers. Hermann, 1970.
- CONWAY, J. H.; SLOANE, N. J. A. Sphere Packings, Lattices and Groups. New York: Springer Verlag, 3rd ed, 1999.
- GARCIA TOSTI; N. C. Corpos Abelianos Reais e Forma Quadrática. 2017. 95 f. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Universidade Estadual Paulista - UNESP, São José do Rio Preto, 2017.



## Aplicação do Projeto do dia da Matemática envolvendo Fractais

André Guilherme Unfried

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste/ Campus Cascavel  
andre\_unfrich@hotmail.com

Fernanda Tomazzi

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste/ Campus Cascavel  
fernandatomazi06@gmail.com

Luciana de Souza

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste/ Campus Cascavel  
luciana.ds95@hotmail.com

Sara Taís Theobald

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste/ Campus Cascavel  
sara-teh@hotmail.com

**Resumo:** Este artigo traz um relato de experiência sobre a aplicação de um Projeto do dia da Matemática, atividade obrigatória da disciplina de Estágio Supervisionado II, onde apresentaremos um pouco sobre o surgimento do dia seis de maio como dia da matemática, o porquê desta data, um pouco sobre o conteúdo dos fractais e também todas as atividades propostas aos alunos. O projeto foi executado com quatro turmas do Colégio Estadual Olinda Truffa de Carvalho. Ao final das aplicações conseguimos perceber que obtivemos sucessos quanto à participação dos alunos nas tarefas dadas e que trabalhar a matemática com atividades diferenciadas pode ser muito gratificante, tanto para os alunos como para nós estagiários.

**Palavras-chave:** Malba Tahan; Fractais; Estágio Supervisionado.

### 1 Introdução

No dia 26 de junho de 2013 a presidente da República, Dilma Rousseff, sancionou a Lei nº 12.835, após a então deputada Raquel Teixeira apresentar um projeto de lei em cinco de maio de 2004 para a instituição do dia seis de maio no Brasil oficialmente como o Dia da Matemática.

O objetivo deste dia é que o Ministério da Educação e da Cultura incentive atividades culturais, educativas e que ocorra um momento de reflexão sobre a educação matemática, promovendo a valorização da cultura e do saber por parte de professores e alunos.

Tal data comemorativa surge como uma homenagem a Júlio César de Mello e Souza, nascido neste mesmo dia no ano de 1895, na cidade do Rio de Janeiro. Ele se tornou, mais tarde, um dos maiores pensadores da Educação Matemática brasileira usando o pseudônimo de Malba Tahan.

Malba Tahan publicou a maior parte da sua produção intelectual, basicamente em um

período em que a matemática estava baseada na estruturação lógica, sendo dessa maneira, carregada excessivamente de símbolos.

Seguindo esse viés, em conjuntura a essa data, desenvolvemos no Colégio Estadual Olinda Truffa de Carvalho um Projeto, no qual procuramos induzir nosso público alvo a pensar de modo diferenciado. Para isso fizemos uso da Geometria Fractal, uma vez que geralmente na escola é ensinada a Geometria Euclidiana para ajudar a entender o universo em que vivemos, porém, nem sempre é suficiente.

Este projeto foi aplicado com alunos do Ensino Médio da rede estadual de ensino da cidade de Cascavel, como parte da disciplina de Metodologia e Estágio Supervisionado II do curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Estadual do Oeste do Paraná.

## 2 Fundamentação Teórica

Segundo Souza e Yamamoto (2011), o ensino da matemática é abordado, muitas vezes, como algo distante e sem aplicação, tendo pouco sentido para os alunos. Isso gera o descontentamento de muitos deles que permanecem desinteressados e não valorizam a disciplina como um todo. Esse descontentamento é ainda mais visível no Ensino Médio, decorrente da forma como os conteúdos são abordados dentro de sala de aula.

A maioria dos alunos do Ensino Médio apresenta-se na faixa etária entre 15 e 18 anos, fase caracterizada pela adolescência, na qual os mesmos passam por diversas mudanças físicas e psicológicas. Formadores de opinião e consciência, estes se deparam com diversas dificuldades e possuem necessidade constante de buscar grupos e interesses individuais para se caracterizarem de alguma forma perante a sociedade; a escola significa para estes alunos um local para conhecer pessoas, para definir gostos e conseqüentemente seu caráter. (SOUZA, YAMAMOTO, 2011, p. 7)

Dessa forma, decidimos trabalhar com fractais, tentando abordá-los de uma maneira que mostre a sua relação com o cotidiano e suas utilidades, esperando despertar o interesse dos alunos para essa ciência.

Segundo Niedermeyer, Koefender e Roos (2009), alguns motivos para trabalhar fractais na escola são:

- Trabalhar conteúdos a partir de exemplos encontrados na natureza estimula a criatividade, o raciocínio lógico, motiva o educando e o auxilia na compreensão de conteúdos e conceitos matemáticos;
- [...]
- A Geometria Fractal pode ser trabalhada em qualquer nível de ensino, pois ela vai de uma simples dobradura de papel até os entes matemáticos modernos que envolvem números complexos, modelagem, etc. (NIEDERMEYER, KOEFENDER, ROOS, 2009, p.8)

No Paraná, as Diretrizes Curriculares Estaduais de Matemática (DCE, 2008) incluem sua abordagem para o Ensino Médio como:

Na Geometria dos fractais, pode-se explorar: o floco de neve e a curva de Koch; triângulo e tapete de Sierpinski, conduzindo o aluno a refletir e observar o senso estético presente nessas entidades geométricas, estendendo para as suas propriedades [...]. (PARANÁ, 2008, p. 57).

Além disso, Souza e Yamamoto (2001) afirmam que através da Geometria Fractal é possível integrar as ferramentas matemáticas essenciais à formação dos alunos, além de mostrar que a matemática possui amplas e diversas aplicações no cotidiano. Gouvea (2005, p.6) também diz que o estudo da Geometria Fractal propicia o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, a integração entre conceitos matemáticos e elementos do cotidiano, o desenvolvimento do senso estético e a criatividade.

O estudo dos fractais, por exemplo, pode despertar um fascínio nos estudantes pelas figuras e construções particulares, pode fazê-los acreditar na facilidade em perceber padrões e regularidades e ao mesmo tempo a complexidade, e irá estimulá-los no momento em que eles encontrarem muitas destas formas no seu dia-a-dia. (SOUZA, YAMAMOTO, 2011, p. 17)

Assim, a utilização do conceito de fractais pode ocorrer em diversos momentos na educação básica, ressaltando as especificidades da faixa etária, ou seja, o conteúdo condizente com o ano. Além disso, deve haver conexão entre os conceitos matemáticos, principalmente, os ligados à geometria, como medidas de ângulos e áreas, conceitos como ponto médio, progressão geométrica e aritmética, entre outros; além de poder ressaltar a interdisciplinaridade da matemática com outras áreas do conhecimento como, por exemplo, biologia, economia, artes, entre outras.

### 3 Metodologia

Iniciamos o projeto contando a história do Dia da Matemática para os alunos e explicando como funcionaria a proposta de trabalho. O projeto teve duração de duas horas aulas em cada turma, totalizando oito horas-aula, aplicado em algumas turmas do ensino médio, sendo elas o 1º A, 1º C, 2º A e 3º B.

Assim que encerramos as falas sobre o Dia da Matemática, utilizamos o projetor multimídia para fazer uma apresentação sobre fractais: o que são, qual a matemática envolvida, quais os primeiros a serem estudados e alguns exemplos na natureza. Assim que encerramos iniciamos a primeira atividade, a construção do fractal Degraus Centrais a partir de dobraduras e recortes.

Para a construção, inicialmente, entregamos uma folha sulfite para cada um e passamos o passo a passo de como realizar a atividade oralmente.

#### **Dobradura passo a passo:**

- 1) Dobre a folha ao meio, ao longo de seu maior lado;
- 2) Dobre ao meio até que a folha fique dividida em 16 partes iguais;
- 3) Deixe a folha dobrada de forma que apareça apenas oito partes, deixando a parte aberta para frente;

- 4) Recorte até a metade os dois vincos paralelos ao vinco central da parte inferior (fechada);
- 5) Dobre a parte central recortada para cima;
- 6) Divida esta nova parte em 8 partes iguais e repita o passo 4;
- 7) Repita o passo 6;
- 8) Desdobre toda a folha de maneira que fique toda aberta.

#### Construção do Fractal:

- 1) Pegue a parte interna do vinco central, puxe para cima e dobre;
- 2) Repita o procedimento com os vincos internos que estão na metade da distância entre o meio da folha e a borda;
- 3) Repita o passo 1 com os vincos internos centrais entre os vincos dobrados.

Ao concluirmos, falamos sobre a matemática envolvida nesse fractal e então novamente utilizamos o projetor multimídia para mostrar aos alunos o próximo fractal: o floco de neve de Koch, através de animação no software Geogebra. Levamos a construção já feita e apenas mostramos o resultado comentando sobre a matemática envolvida.

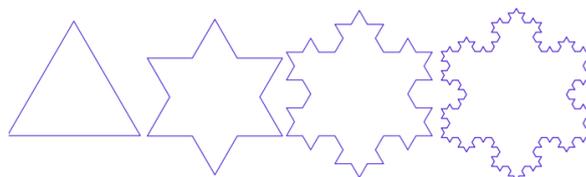


Figura 1

Fonte: <http://matematicaparatodos-fernanda.blogspot.com.br/2011/11/construcao-da-curva-e-do-floco-de-neve.html>

Quando encerramos a visualização pedimos para que se reunissem em grupos de quatro integrantes para realizarmos a próxima atividade que foi a construção da pipa de Graham Bell<sup>1</sup> utilizando canudos, linha e papel seda.

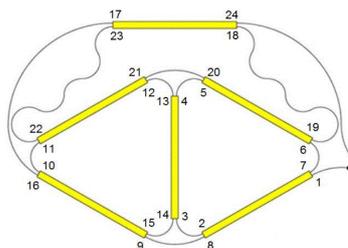
Inicialmente entregamos aos alunos os materiais necessários: 24 canudos de mesmo tamanho; 4 pedaços de linha com tamanho igual a 16 L, onde L é o comprimento do canudo; 4 folhas de papel de seda; 1 molde de cartolina; pedaços de fita dupla-face e 4 tesouras.

Assim que todos obtinham os materiais passamos o passo a passo para a atividade no projetor para que os alunos acompanhassem a construção. Enquanto isso ficamos à disposição para auxiliá-los no que fosse necessário.

**PASSO 1:** Passe um dos segmentos de linha por dentro de seis canudos seguindo a ordem indicada na figura entregue. Feito isto, puxe ao máximo as pontas para formar a estrutura tetraédrica. Dê um nó e corte os excessos.

**PASSO 2:** Pegue uma das folhas de papel de seda e dobre-a em quatro. Encaixe o vértice do molde, no canto em que se encontram as dobras (centro da folha). Recorte o papel de seda em torno do molde.

<sup>1</sup>Disponível passo a passo em: <http://www.uff.br/cdme/pgb/pgb-html/pgb-br.html>



**Figura 2**

Fonte: <http://clubes.obmep.org.br/blog/atividade-pipa-uma-brincadeira-seria-sala-2-3/atividade-pipa-uma-brincadeira-seria-construcao-da-pipa-tetraedrica/>

**PASSO 3:** Coloque a aresta de uma das estruturas tetraédricas em cima da fita do meio, deite-a sobre uma das metades da folha e envolva, com as abas, as arestas que tocam o papel. Repita na outra parte da folha. O objeto construído é semelhante a uma asa-delta.

**PASSO 4:** Agora amarre as estruturas que o grupo construiu. Elas serão unidas pelos vértices, de modo que cada uma das estruturas tem que estar ligada às outras três.

Assim que concluíram comentamos sobre qual fractal está presente na pipa, ou seja, ela pode ser considerada como a representação tridimensional do triângulo de Sierpinsky. Por estarem em grupos alguns alunos encerraram as atividades em sala, porém outros não conseguiram concluir toda a construção da pipa, então falamos para encerrarem em casa e tentarem empinar para nos contar as experiências depois.

## 4 Conclusões e Resultados

Com a aplicação destas atividades, foi possível perceber que poucos alunos conheciam o motivo do dia seis de maio ser o dia da matemática, tampouco sabiam quem era Malba Tahan, porém, após algumas explicações de nossa parte conseguiam compreender melhor o significado. Durante as aplicações das atividades obtivemos muita participação e colaboração dos alunos, o que nos surpreendeu e nos animou muito.

Na execução da segunda atividade percebemos que a divisão da turma em grupos foi de grande valia, pois os alunos se motivavam e constantemente auxiliavam seus colegas que não estavam conseguindo completar, cabendo assim aos estagiários apenas a supervisão e auxílio pontual na atividade.

Para nós, autores do mesmo, essa proposta foi muito motivadora, pois o trabalho com um conteúdo não comum na grade curricular possibilitou-nos uma bagagem maior e entusiasmo para sair do currículo e trabalhar com atividades que não necessariamente estejam presentes na grade curricular.

Além disso percebemos que trabalhar a matemática de uma forma diferenciada da que os alunos estão acostumados em sala pode ser muito gratificante tanto para os alunos quanto para nós estagiários.

## Referências

- GOUVEA, F.R. **Um Estudo de Fractais Geométricos através de Caleidoscópios e Softwares de Geometria Dinâmica**. Dissertação de Mestrado, Unesp, Rio Claro, 2005.
- NIEDERMEYER, C.; KOEFENDER, C.; ROOS, L. **Geometria Fractal e Ensino de Matemática**. Encontro Gaúcho de Educação Matemática, 10., Ijuí: UNISC, 2009.
- PARANÁ. **Diretrizes Curriculares Estaduais de Matemática**, SEED, Curitiba, 2008.
- SALLES, Pedro Paulo; PEREIRA NETO, André. Malba Tahan: Muito além do pseudônimo. CENTRO DE APERFEIÇOAMENTO DO ENSINO DE MATEMÁTICA - CAEM, n.30, 2015, São Paulo. In: **Palestras...** São Paulo: Universidade de São Paulo, p.1-12, 2015.
- SOUZA, P.A; YAMAMOTO, E. M. **A abordagem de fractais no ensino médio**. VII Jornada de iniciação científica, Universidade Presbiteriana de Mackenzie, 2011.

# Índice de autores

- Alexandre Batista de Souza, 9  
Alexandre Carissimi, 27, 257  
Amarildo de Vicente, 91, 99  
Ana Maria Foss, 19  
André Guilherme Unfried, 205, 289  
André Vicente, 113, 121  
André Wilson de Vicente, 91, 99, 211  
Andréia Büttner Ciani, 179, 227, 233  
Arleni Elise Sella Langer, 277  
  
Bruno Gonçalves, 67, 187  
  
Camila Frank Hollmann, 167  
Carina Moreira Costa, 211  
Caroline Souza Santos, 81  
Cláudia Brandelero Rizzi, 91  
Cléia Fabiane Winck, 267  
Clezio Aparecido Braga, 27  
  
Daiane Cristina da Silva Aliatti, 19  
Diessica Aline Quinot, 19  
Dulcyene Maria Ribeiro, 257  
  
Eliandra de Oliveira, 199  
Elisangela Cristina Ribeiro, 257  
Evandro Sozo de Oliveira, 257  
  
Fabiana Magda Garcia Papani, 49, 219, 241  
Fernanda Paula John, 155  
Fernanda Tomazzi, 289  
Flavio Roberto Dias Silva, 9, 39, 61  
Francieli Cristina Agostinetto Antunes, 205  
  
Guilherme Felipe Schallenger Schaurich, 167  
Guilherme Gasparini Lovatto, 205  
Guilherme Vieira Bochi, 61  
  
Janaina Maria de Lima Gonçalves, 39, 199  
Jaqueline do Nascimento, 199  
Jean Carlos Gibbert, 179  
João Alfredo Simon Santos, 277  
  
Ketelly Caroline Felix da Silva, 249  
  
Laís Dri da Rosa, 73  
Laura Massuda Crema, 241  
Leonardo Salvador, 73, 205  
Lucas Campos de Araújo, 49, 81, 145  
Lucas Teixeira Bernardo, 277  
Luciana de Souza, 289  
  
Mariana da Rosa, 199, 233  
Matheus A. A. Anzolin, 145  
Matheus Alexandre Alves Anzolin, 81  
Murilo Gabriel de Maceda, 113  
  
Naísa Camila Garcia Tosti, 283  
  
Paula Yumi Takeda, 105, 133  
Paulo Domingos Conejo, 105, 133, 167  
  
Renato Massamitsu Zama Inomata, 105, 133  
Rogério Luiz Rizzi, 91  
Rosangela Villwock, 211  
  
Sônia Cristina Maciel, 227  
Sandro Marcos Guzzo, 155, 187, 267  
Sara Taís Theobald, 289  
Simone Aparecida Miloca, 105, 133  
Suenir Barreto dos Anjos, 277  
  
Thalia Falquievicz Corassa, 67, 219  
Ueslei Mallmann, 249  
  
Valdecir de Oliveira Teixeira, 121  
Veruska Oriane Brandalize, 233  
  
Wilson Alves de Oliveira, 99